جامعة بنـها
كلية التربية

الفرقة الأولي لغة عربية . الفصل الدراسي الثاني

تحليل رياضي - العام الجامعي 2012/ 2013 (إجـــــابة)

-- الثلاثاء 2013/5/21 ---------------------------

السؤال الأول:

أ- ـ أوجد النهايات التالية

$$1)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} \qquad , \qquad 2)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

ب- بفرض أن y دالة قابلة للتفاضل ومعرفة ضمنياً بالمعادلة

$$y^3 + 3xy + x^3 - 5 = 0$$

أوجد y' بدلالة y, x .

السؤال الثاني:

أ- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y = x^3 - x^2 - 8x + 2$$

ب- أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$$

السؤال الثالث:

أ- إذا كانت $z = 3x^2 - 2xy + y^2$ أوجد كل من

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

ب- أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$z = x + y + \frac{a^3}{xy}$$

ومدى اعتماد ذلك على قيمة الثابت a.

الإجـــابة

إجابة السؤال الأول:

أ-

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\tan 5x}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{5x}}=\frac{3}{5}$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2\cdot 4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ب-

بتفاضل المعادلة المعطاة مباشرة بالنسبة إلى x نحصل على

$$3y^2y'+3xy'+3y+3x^2=0$$

ومنها نوجد المشتقة

$$y'=-\frac{y+x^2}{y^2+x}$$

<u>إجابة السؤال الثاني:</u>

أـ نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم x التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y' = 3x^2 - 2x - 8 = (3x+4)(x-2)$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما $y' > 0$ أي عندما

$$(3x+4)(x-2) > 0$$

$\therefore$ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$(3x+4) > 0 \quad , \quad (x-2) > 0$$

أو المتباينات

$$(3x+4) < 0 \quad , \quad (x-2) < 0$$

أي أن x تحقق المتباينات

$$x > -4/3 \quad , \quad x > 2$$

أو المتباينات

$$x < -4/3 \quad , \quad x < 2$$

وبحل كل متباينتين معا نجد أن الدالة المعطاة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$x < -4/3$ أو $x > 2$

أي أن الدالة تزايدية في الفترتين

$$(-\infty, -4/3) \, , \, (2, \infty)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة $(-4/3, 2)$

ب-

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$$

$y/=6x^2-6x-12=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

النقاط الحرجة عند

$x=-1 \, , \; x=2$

ـ نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما $x_1 = -1$ نجد أن

$$for \quad x < -1: \qquad y' => 0$$

$$for \quad x > -1: \qquad y' => 0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1 = -1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب و هذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1 = -1$ 0

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2 = 2$ نجد أن

$$for \quad x < 2: \qquad y' =< 0$$ --

$$for \quad x > 2: \qquad y' => 0$$

تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى $x_2 = 2$ أي أنه عند المرور بالنقطة

ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة

<u>إجابة السؤال الثالث:</u>

أ -
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$$

ب-

أولاً نوجد النقط الحرجة

$$z_x = 1 - \frac{a^3}{x^2 y} = 0$$

$$z_y = 1 - \frac{a^3}{x y^2} = 0$$

من هاتين المعادلتين واضح أن

$$x \neq 0 \qquad , \qquad y \neq 0$$

إذن

$$x^2y - a^3 = 0 \quad , \quad xy^2 - a^3 = 0$$

$$\therefore x^2y - xy^2 = 0 \Rightarrow xy(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\therefore x = y = a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة وهي (a,a)

$$z_{xx} = \frac{2a^3}{x^3y} \quad , \quad z_{xy} = \frac{a^3}{x^2y^2} \quad , \quad z_{yy} = \frac{2a^3}{xy^3}$$

تكون (a,a) عند النقطة الحرجة

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{2}{a}\cdot\frac{2}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{3}{a^3} > 0$$

وبالتالي تكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة $z_{xx} = \frac{2}{a} > 0$ فإن $a > 0$ إذا كانت (a,a) قيمتها

$$z_{\min} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

وبالتالي تكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة (a,a) $z_{xx} < 0$ فإن $a < 0$ إذا كانت قيمتها

$$z_{\max} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد - كلية العلوم – قسم الرياضيات
ت/ 01157673982