جامعة بنها – كلية التربية – الفصل الدراسي الثاني للعام 2013/2012
امتحان الفرقة الأولى تربية عام – شعبة رياضيات

المادة / تحليل رياضي (2) **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

أوجد قيمة التكاملات الآتية :-

$a)\ \int \sin^{1/3} x \cos^3 x\, dx$ $b)\ \int \frac{dx}{1+e^x}$ $c)\ \int x^3\, e^{x^4}\ dx$

$d)\ \int \frac{\ln x}{x} dx$ $e)\ \int x e^x dx$ $f)\ \int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

السؤال الثاني

أ- أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 = x - 1$ والخط المستقيم $y = x - 3$ 0

ب- أوجد بإستخدام التكامل حجم الكرة التي نصف قطرها a 0

السؤال الثالث

أ- بإستخدام الكسور الجزئية أوجد قيمة التكامل $\int \frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x+2)} dx$

ب- بإستخدام طريقة الاختزال المتتالي أحسب قيمة التكامل $\int x^n \sin ax\, dx$ ثم أحسب قيمة التكامل $\int x^4 \sin x\, dx$

جـ- بإستخدام قاعدة شبه المنحرف أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{0.6} x^4\, dx$$

بإعتبار ان طول الخطوة $h = 0.1$ 0

السؤال الرابع

أ- كون المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو $y(x) = c_1 e^x + c_2 x$

ب- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(xy^2 - x)dx + (x^2 y + y)dy = 0$$

جـ- أختبر تمام المعادلة التفاضلية

$$(xy^2 + y - x)\, dx + (x^2 y + x)\, dy = 0$$

ثم أوجد الحل العام لها والحل الذي يحقق الشرط $y(-1) = 1$ 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة تحليل رياضي (2) للفرقة الأولى كلية التربية – تربية عام- شعبة رياضيات العام الدراسي 2013/2012 الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار 2013/5/21(ورقه امتحانيه) الزمن ساعتان

أستاذ المادة د/ مجدي مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

$$a)\int \sin^{\frac{1}{2}} x\cos^3 x\,dx=\int \sin^{\frac{1}{3}} x\cos^2 x\cdot\cos x\,dx=\int \sin^{\frac{1}{3}} x(1-\sin^2 x)\,d\sin x=\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x-\frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x+c$$

$$b)\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}dx=-\ln(1+e^{-x})+c$$

$$c)\int x^3 e^{x^4}\,dx=\frac{1}{4}\int e^{x^4}\,d(x^4)=\frac{1}{4}e^{x^4}+c$$

$$d)\int\frac{\ln x}{x}dx=\int \ln x\,d\ln x=\frac{(\ln x)^2}{2}+c$$

$$e)\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c$$

f) باستخدام التعويض $u=x-1 \quad\Rightarrow\quad \therefore du=dx\,,\,x=u+1$

$$\therefore\int\frac{x}{(x-1)^4}dx=\int\frac{u+1}{u^4}du=\int(u^{-3}+u^{-4})\,du=\frac{u^{-2}}{-2}+\frac{u^{-3}}{-3}+c=-\left[\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{3(x-1)^3}\right]+c$$

إجابة السؤال الثاني

أ- لإيجاد نقط التقاطع نحل المعادلتين معاً كما يلي

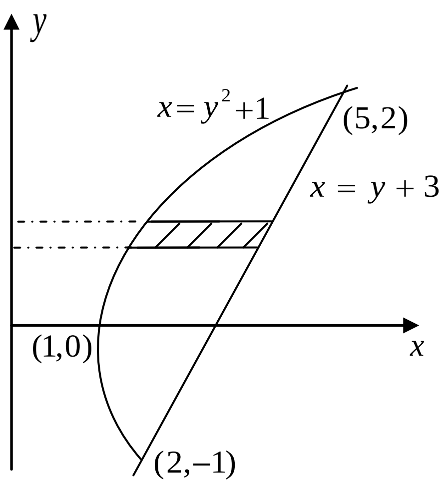
$$y^2+1=y+3$$

$$\therefore y^2-y-2=0\quad\Rightarrow\quad\therefore(y+1)(y-2)=0\quad\Rightarrow\quad\therefore y=-1\quad or\quad y=2$$

$$at\ y=-1\Rightarrow\therefore x=2\quad\Rightarrow\quad(2,-1)$$

$$at\ y=2\ \Rightarrow\therefore x=5\quad\Rightarrow\quad(5,2)$$

أي أن نقط التقاطع هي $(2,-1)\,,\,(5,2)$

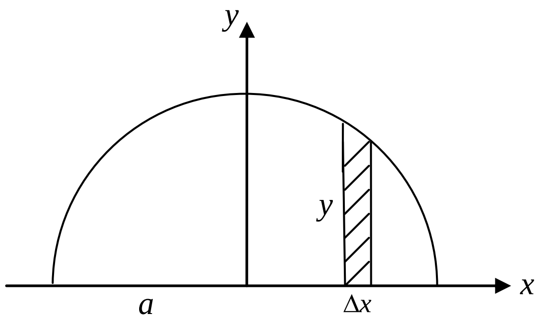


$$\Delta A=(x_1-x_2)\Delta y=\left[(y+3)-(y^2+1)\right]\Delta y$$

$$\therefore A=\int_{-1}^{2}\left[(y+3)-(y^2+1)\right]dy=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)\,dy$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{3}$$

ب- سطح الكرة تنتج من دوران نصف دائرة $x^2 + y^2 = a^2$ دورة كاملة حول محور السينات كما هو مبين في الشكل السابق



$$\Delta V = \pi y^2 \, \Delta x = \pi (a^2 - x^2) \, \Delta x$$

$$\therefore V = \int_{-a}^{a} \pi (a^2 - x^2) \, dx = \pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi a^3$$

إجابة السؤال الثالث :

أ- أ- نلاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام في الكسر موضوع التكامل ، لذلك يجب إجراء عملية القسمة المطولة نحصل على

$$\frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x+2)} = 2 + \frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}$$

ثم نحلل الكسر $\dfrac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}$ إلى كسوره الجزئية بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق نجد أن

$$\frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك ومساواة البسط في كل من الطرفين ينتج أن

$$-2x+3 = A(x+2) + B(x-1)$$

بوضع $x = 1$ ينتج أن $A = 1/3$ وبوضع $x = -2$ ينتج أن $B = -7/3$ وبالتالي يصبح التكامل على الصورة

$$\int \frac{2x^2 - 1}{(x-1)(x+2)} dx = \int \left[2 + \frac{1/3}{x-1} - \frac{7/3}{x+2} \right] dx = 2x + \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{7}{3} \ln(x+2) + c$$

ب- نفرض أن

$$I_n = \int x^n \sin ax \, dx \qquad (1)$$

نستخدم التكامل بالتجزئ لذلك نفرض أن

$$u = x^n \qquad dv = \sin ax \, dx$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$du = n x^{n-1} dx \qquad v = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$I_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \qquad (2)$$

بحساب التكامل $\int x^{n-1} \cos ax \, dx$

$$u = x^{n-1} \qquad\qquad dv = \cos ax\, dx$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$du = (n-1)\, x^{n-2} dx \qquad\qquad v = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\therefore \int x^{n-1} \cos ax\, dx = \frac{1}{a} x^{n-1} \sin ax - \frac{(n-1)}{a} \int x^{n-2} \sin ax\, dx \qquad (3)$$

بالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (2) نحصل على

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, dx \\ &= -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} \int x^{n-2} \sin ax\, dx \\ &= -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} \end{aligned}$$

أي أن

$$I_n = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \sin ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} \qquad (4)$$

حيث

$$I_\circ = \int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

$$I_1 = \int x \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a} \int \cos ax\, dx = -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + c$$

لحساب قيمة التكامل $\int x^4 \sin x\, dx$ نلاحظ أن $n = 4\, ,\, a = 1$ إذن

$$I_4 = \int x^4 \sin x\, dx = -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x - 12 I_2$$

$$I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 I_\circ$$

$$I_\circ = \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

بالتعويض عن $I_2 , I_\circ$ في I_4 نحصل على التكامل المطلوب

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y	0	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296

$$I = \frac{0.1}{2} \left[0 + 2(0.0001) + 2(0.0016) + 2(0.0081) + 2(0.0256) + 2(0.0625) + 0.1296 \right] = 0.016$$

إجابة السؤال الرابع :

أ-

$$y(x)=c_1e^x+c_2x \qquad (1)$$

الفكرة هنا هي حذف الثابتين c_1,c_2 من العلاقة (1) 0 بتفاضل العلاقة (1) مرتين بالنسبة إلى x فإننا نحصل على

$$y'=c_1e^x+c_2 \qquad (2)$$

$$y''=c_1e^x \qquad (3)$$

من العلاقتين (1),(2) ينتج أن

$$xy'-y=(x-1)c_1e^x=(x-1)y''$$

أي أن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$(x-1)y''-xy'+y=0$$

ب- يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{y}{y^2+1}dy=0$$

بالتكامل ينتج أن

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int\frac{2y}{y^2+1}dy=A$$

$$\therefore \ln(x^2+1)+\ln(y^2-1)=\ln c \quad \Rightarrow \quad \therefore (x^2+1)(y^2-1)=c$$

و هذا يسمى بالحل العام للمعادلة التفاضلية 0

جـ -

$$P=xy^2+y-x \qquad , \qquad Q=x^2y+x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xy+1 \qquad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy+1 \qquad , \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذن المعادلة التفاضلية المعطاة معادلة تامة 0 وبالتالي توجد دالة $F(x,y)$ بحيث يكون

$$dF=(xy^2+y-x)\,dx+(x^2y+x)\,dy$$

ومن تعريف dF ينتج أن

$$\frac{\partial F}{\partial x}=xy^2+y-x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+x \qquad (2)$$

من العلاقة الأولى نجد أن

$$F=\int(xy^2+y-x)\,dx=\frac{1}{2}x^2y^2+xy-\frac{1}{2}x^2+\phi(y)$$

ومن العلاقة الثانية نحصل على

$$F=\frac{1}{2}x^2y^2+xy+\psi(x)$$

بمقارنة الصورتين المختلفتين للدالة F نحصل على أن

$$F=\frac{1}{2}x^2y^2+xy-\frac{1}{2}x^2$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية على الصورة

$$\frac{1}{2}x^2y^2+xy-\frac{1}{2}x^2=c$$

عندما $y=1, x=-1 \quad \therefore \Leftarrow \frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}=-1=c$

ويكون الحل الذي يناظر هذا الشرط هو

$$\frac{1}{2}x^2y^2+xy-\frac{1}{2}x^2=-1$$