كليه التربية **عام 2013/2012** **الفرقة الاولى اساسي (رياضيات)**

قسم الرياضيات **<u>المادة : جبر (نصف ورقة)(تخلف)</u>** **نموذج اجابة**

اجابة السؤال لأول

(أ) أثبت أن

$$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة 0

<u>الحـــل :</u>

1- من السهل التحقق من أن العلاقة صحيحة عند $n=1$

2- نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن

$$1+2+3+\cdots+k=k(k+1)/2 \qquad (1)$$

ولإثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ نضيف $(k+1)$ على كل من طرفي العلاقة (1) نحصل على

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)}{2}(k+2)=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$$

وهو يساوي الطرف الأيسر من المتطابقة المعطاة إذا وضعنا فيها $n=k+1$ ، أي أن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ وهذا يعني أن العلاقة صحيحة لجميع قيم n الموجبة 0

(ب) حل المعادلة

$$z^{12}-i=0$$

<u>الحـــل</u>

المعادلة على الصورة

$$z^{12}=i$$

بكتابة i في الصورة القطبية نحصل على

$$z^{12} = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\therefore z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)^{1/12}$$

$$= \cos\frac{1+4k}{24}\pi + i\sin\frac{1+4k}{24}\pi$$

وبوضع $k = 0,1,2,3,...,11$ نحصل على جذور المعادلة 0

اجابة السؤال الثاني :

(أ) **أوجد الكسور الجزئية للكسر :** $\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

<u>الحل :</u>

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام ولكن المقام يجب تحليله فنحصل على :

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}$$

وتكون الكسور الجزئية على الصورة

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

وكلا من الثابتين يمكن إيجاده بالتغطية كما يلي :

$$A = \left.\frac{x+1}{x-2}\right|_{x=1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$B = \left.\frac{x+1}{x-1}\right|_{x=2} = \frac{3}{1} = 3$$

فيكون الكسر الجزئي المطلوب على الصورة

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

(ب) **أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية (بواسطة المحددات)**

$$2x-2y-z-3=0$$
$$4x+5y-2z+3=0$$
$$3x+4y-3z+7=0$$

<u>الحـــل:</u>

بما أن

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -2 & -1\\ 4 & 5 & -2\\ 3 & 4 & -3\end{vmatrix}=-27\neq 0$$

إذن للمجموعة حل محدد على الصورة

$$\frac{x}{\Delta_x}=\frac{-y}{\Delta_y}=\frac{z}{\Delta_z}=\frac{-1}{\Delta}$$

حيث

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ 5 & -2 & 3\\ 4 & -3 & 7\end{vmatrix}=54\,,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 4 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 7\end{vmatrix}=27$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}2 & -2 & -3\\ 4 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 7\end{vmatrix}=81$$

إذن حل المجموعة هو

$$\frac{x}{54}=\frac{-y}{27}=\frac{z}{81}=\frac{-1}{-27}\Rightarrow\therefore x=2, y=-1, z=3$$

اجابة السؤال الثالث

(أ) أوجد حل المعادلتين

$$2x-3y=4$$
$$x+2y=1$$

<u>الحـــل</u>

المعادلتين السابقتين يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أو على الصورة

$$A \cdot X = C$$

ومنها نجد أن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \therefore |A| = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك يكون $X = A^{-1} \cdot C$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

ومن هاتين المعادلتان نجد أن $y = 2/7$, $x = 11/7$

(ب) أوجد ناتج وباقي قسمة $P(x) = 4x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 6$ على

$$Q(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$$

<u>الحـــل :</u>

بإجراء القسمة المطولة المعتادة نحصل على ناتج القسمة $S(x) = 2x^2 - 2x + 4$

و الباقي $r(x) = -19x^2 + 3x + 2$