كلية التربية **الفرقة الاولى اساسى رياضيات**

قسم الرياضيات **الزمن : ساعة**

الماده : الجبر **الفصل الدراسي الاول 2012- 2013**

نموذج اجابة

اجابة السؤال الأول

(أ) برهن على أن

$$1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\times 3^n=\frac{(2n-1)\times 3^{n+1}+3}{4}$$

<u>الحـــل :</u> بالتعويض عن $n=1$ نجد أن

الطرف الأيسر $=1\times 3=3$

الطرف الأيمن $=\left[(2-1)3^2+3\right]/4=12/4=3$

أي أن العلاقـــــة صحيحة عندما $n=1$ 0 نفرض أن العــلاقة صحيحة عندما $n=k$ أي أن

$$1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+k\times 3^k=$$

$$=\frac{(2k-1)\times 3^{k+1}+3}{4} \qquad (1)$$

بإضـــــافة الحد $(k+1)\times 3^{k+1}$ إلى كل من طرفي العلاقة (1) نجد أن

$$1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+k\times 3^k+(k+1)3^{k+1}=$$

$$=\frac{(2k-1)\times 3^{k+1}+3}{4}+(k+1)3^{k+1}$$

$$=\left[3^{k+1}\left[(2k-1)+4(k+1)\right]+3\right]/4$$

$$=\frac{3^{k+1}(6k+3)+3}{4}=\frac{\left[2(k+1)-1\right]3^{k+1}+3}{4}$$

وهذا يساوي الطرف الأيمن من العلاقة المعطاة عندما نضع فيها $n=k+1$ أي أن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ وهذا يثبت أن العلاقة صحيحة لجميع قيم n الموجبة 0

(ب) أوجد المقياس والسعة الرئيسية للعدد المركب

$$z=\frac{(2+i)(3-4i)}{2+2i}$$

<u>الحـــل</u>

باستخدام العلاقات السابقة للضرب والقسمة نجد أن المقياس

$$|z|=\left|\frac{(2+i)(3-4i)}{2+2i}\right|=\frac{|(2+i)|\,|(3-4i)|}{|2+2i|}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{25}}{\sqrt{8}}$$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

والسعة تعطى بالصورة

$$\arg z=\arg\frac{(2+i)(3-4i)}{2+2i}$$

$$=\arg(2+i)+\arg(3-4i)-\arg(2+2i)$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)-\tan^{-1}\frac{2}{2}$$

$$=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{\pi}{4}$$

<u>نظرية "دي موافر"</u>

إذا كان $n=a/b$ عدد نسبي حيث $b\neq 0$ فإن

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

إجابة السؤال الثاني

(أ) أوجد الكسور الجزئية للكسر : $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$

<u>الحــل :</u>

نلاحظ أن درجة البسط تساوي درجة المقام لذا نحتاج لعمل قسمة مطولة وبعد إجراء القسمة المطولة ينتج

أن $$\frac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}=1+\frac{2x-3}{x(x-1)(2x+3)}$$

ويترك حله للطالب وسينتج أن

$$\frac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{8}{5(2x+3)}$$

(ب) أوجد قيمة k بحيث تكون مجموعة المعادلات

$$x+(k+1)y+1=0$$

$$2kx+5y-3=0$$

$$3x+7y+1=0$$

متوافقة 0

الحـــل:

المجموعة المعطاة متوافقة عندما

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 2k & 5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore (5+21)-(k+1)(2k+9)+(14k-15)=0$$

$$\therefore 26-2k^2-11k-9+14k-15=0$$

$$\therefore 2k^2-3k-2=0$$

$$\therefore (2k+1)(k-2)=0$$

$$\therefore k=2 \quad , \quad k=-1/2$$

اجابة السؤال الثالث

(أ) أوجد قيمة المجاهيل x, y, z في المعادلات الآتية باستخدام طريقة كرامر

$$5x-4y \qquad =10$$

$$4y-5z=-5$$

$$3x \qquad -2z=20$$

الحـــل

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=5(-8)+4\times 15+0=-40+60=20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -5 & 4 & -5 \\ 20 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (10)\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - (-4)\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 20 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 10(-8) + 4\times 110 + 0 = -80 + 440 = 360$$

وبالمثل نجد أن

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \\ 3 & 20 & -2 \end{vmatrix} = 5(10+100) - 10(15)$$

$$= 5(110) - 150 = 550 - 150 = 400$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 10 \\ 0 & 4 & -5 \\ 3 & 0 & 20 \end{vmatrix} = 5(80) + 4(15) + 10(-12)$$

$$= 400 + 60 - 120 = 340$$

وباستخدام طريقة كرامر نجد أن

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{360}{20} = 18$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{400}{20} = 20$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{340}{20} = 17$$

(ب) حل المعادلة

$$2x^3 - 21x^2 + 42x - 16 = 0$$

إذا كانت جذورها تكون متوالية هندسية 0

<u>الحـــل :</u> نفرض أن جذور المعادلة هي

$$\frac{a}{r}, a, ar$$

وهي متوالية هندسية أساسها r وسبب أخذها على هذه الصورة هو التخلص من أحد المجهولين عند استخدام علاقة فييتا الأخيرة (حاصل ضرب الجذور) باستخدام العلاقتين الأولى والأخيرة من علاقات فييتا نجد أن

$$\frac{a}{r} + a + ar = -\left(-\frac{21}{2}\right) \Rightarrow a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{21}{2} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)\cdot(a)\cdot(ar)=-(-16)\Rightarrow a^3=8\Rightarrow a=2$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{1}{r}+1+r=\frac{21}{4}\Rightarrow\therefore 4r^2-17r+4=0$$

$$\therefore (4r-1)(r-4)=0\Rightarrow\therefore r=\frac{1}{4},r=4$$

وتكون جذور المعادلة هي $8,2,1/2$