الفرقة الرابعة– كلية تربية(عام)–(شعبة الرياضيات)

الفصل الدراسي الأول

يوم الامتحان: الأحد 2016/1/10 م

المادة : رياضيات تطبيقية (النظرية النسبية الخاصة)

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية (عام)	الفرقة الرابعة	التاريخ: 2016/1/10
شعبة : الرياضيات	تطبيقية (نسبيـة + ديناميكا الموائع(1))	الزمـن : ساعتان

ثانياً: النظرية النسبية الخاصة(ساعة واحدة)

أجب عن الأسئلة الآتية:

1-a	تكلم بالتفصيل عن تجربة الإنضغاط الطولى الذهنية لألبرت اينشتاين والتي استنتج منها $$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$ حيث أن L' هو الطول الثابت عند المشاهد S' و كذلك L يمثل الطول المتحرك S.
1-b	جسمين Q, P يتحركان على محور x بالنسبة للمشاهد S حسب القانونين $$P \quad : \quad x = \frac{c}{a}\sqrt{c^2 + a^2 t^2}$$ $$Q \quad : \quad x = \frac{c}{2} t + \frac{c^2}{a}$$ وعلى ذلك فإنهما يتلاقيا في اللحظتين الزمنيتين $t = 0, T$. أحسب الفترة الزمنية بين تلاقيهما حسب كل من المشاهدين S, P, Q.
2-a	إذا تحركت نقطة مادية فان متجه العجلة لها $\vec{a}$ عند المشاهد S هو $$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} = \frac{du_x}{dt} \hat{i} + \frac{du_y}{dt} \hat{j} + \frac{du_z}{dt} \hat{k}$$ ويكون متجه العجلة $\vec{a'}$ عند المشاهد S' هو $$\vec{a'} = a_{x'} \hat{i} + a_{y'} \hat{j} + a_{z'} \hat{k} = \frac{du_{x'}}{dt} \hat{i} + \frac{du_{y'}}{dt} \hat{j} + \frac{du_{z'}}{dt} \hat{k}$$ أوجد تحويلات لورنتز التي تربط بين مركبات كل من المتجهين $\vec{a}$ ، $\vec{a'}$ ؟
2-b	إشارة ضوئية انطلقت من O وامتصت في النقطة P على مسافة l من O حيث الزاوية POX هي θ عند S. أوجد الزمن τ' والمسافة l' بين انبعاث الضوء وامتصاصه عند المشاهد S' ؟

انتهت الأسئلة

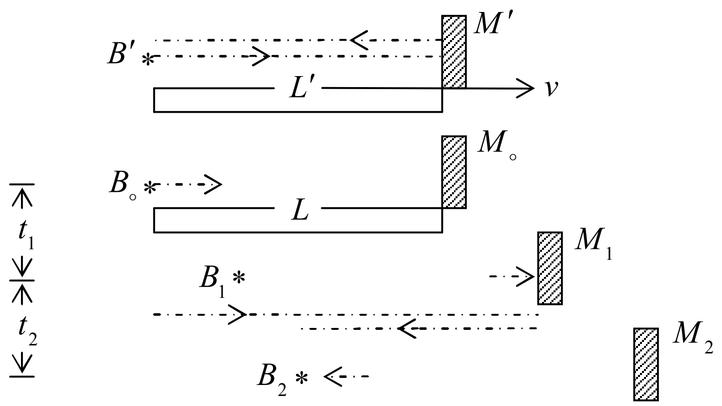
وتمنياتي لكم بالتوفيق

د. /خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

تجربة الانضغاط الطولي **Length contraction**

اعتبر أينشتين التجربة الذهنية الموضحة بالرسم كما يلي



وهنا نعتبر الطول L' ساكنا بالنسبة للمشاهد S' وبذلك فإنهما يتحركان بسرعة v بالنسبة للمشاهد S ويكون مقدار هذا الطول متحركا على امتداد محور x هو L . وإذا وضعنا مرآة M' على الطرف لأيمن للطول L' وأرسلنا إشارة ضوئية من الطرف الآخر B' فإن الفترة الزمنية التي تلزم لذهاب الإشارة الضوئية إلى المرآة ثم الانعكاس والعودة إلى نقطة البداية هي $\Delta t' = 2L'/c$ ومن الواضح أن هذه الفترة الزمنية تكون بين حدثين واقعين في نفس المكان عند S' حيث خرجت الإشارة الضوئية من B' ثم عادت إلى نفس النقطة B' . وإذا بحثنا كيف يرى المشاهد S هذين الحدثين وبالطبع تكون الفترة الزمنية Δt بينهما حسب العلاقة

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

ومن الواضح أن الإشـــارة الضوئية تبدأ عند النقطة $B_\circ$ وتصل إلى المرآة عند الوضع M_1 وليس $M_\circ$ ثم تنعكس وتعود لكي تصل إلى طرف البداية عند الوضع B_2 وذلك لأن الطول L متحرك أيضا أثناء مسيرة الضوء ، وهذا الطول L هو دائماً المسافة بين النقطتين M, B أي أن

$$L = B_\circ M_\circ = B_1 M_1 = B_2 M_2$$

والآن يمكننا حساب الفترة الزمنية بين خروج الإشارة الضوئية وعودتها حيث أنها مجموع زمني رحلتي الذهاب والعودة وكما يتضح من الرسم

$$\Delta t = t_1 + t_2$$

$$B_\circ M_1 = ct_1 = L + vt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$M_1 B_2 = ct_2 = L - vt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L}{c+v}$$

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) عن كل من $\Delta t', \Delta t$ نجد أذن

$$\frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-v^2/c^2}=\frac{2L'}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \therefore L'=\frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة توضح أن الطول الثابت L' عند المشاهد S' سوف يكون قياسه عند S هو الطول المتحرك L ومقداره أقل من L' إذا كانت الحركة موازية لهذا الطول .

إجابة السؤال 1-b:

عندما يتلاقى الجسمين يكون موقعهما على محور x واحداً أي عندما $x_p = x_Q$ حيث نجد إذن

$$c^2+a^2t^2=\left(\frac{a}{2}t+c\right)^2=\frac{a^2t^2}{4}+cat+c^2$$

$$\left(\frac{3}{4}at-c\right)at=0 \quad\Rightarrow\quad t=0 \quad , \quad \frac{4c}{3a}$$

ويتضح مباشرة أن الفترة الزمنية بين تلاقي الجسمين بالنسبة للمشاهد S هي $T=4c/3a$

وحيث أن الجسيم Q يتحرك بسرعة منتظمة $\dot{x}_Q=c/2$ فإن الفترة الزمنية T_Q حسب ساعات Q هي فترة خصوصية (proper) وقيمتها إذن

$$T_Q=T\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}T$$

أما بالنسبة لساعات P فإن سرعتها غير منتظمة حيث نجد $\dot{x}_p=\dfrac{cat}{\sqrt{c^2+a^2t^2}}$ ، ولكن إذا اعتبرنا العنصر التفاضلي dt بالنسبة للمشاهد S فإن نظيره العنصر التفاضلي dt_p بالنسبة للجسيم P تكون خصوصية (proper) وتصبح

$$dt_p=dt\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}_p}{c}\right)^2}=\frac{c\,dt}{\sqrt{c^2+a^2t^2}}$$

وبذلك تكون الفترة الإجمالية T_p حسب ساعات P هي

$$T_p=\int_0^{T_p}dt_p=\int_0^{T}\frac{c\,dt}{\sqrt{c^2+a^2t^2}}$$

ولحساب هذا التكامل نستخدم التعويض

$$at=c\tan\theta \quad , \quad a\,dt=c\sec^2\theta\,d\theta$$

$$T_p = \frac{c}{a}\int_0^T \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{a}\int_0^T \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{c}{a}\left[\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right]_0^T = \frac{c}{a}\ln\left[\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}}+\frac{aT}{c}\right]$$

$$= \frac{c}{a}\ln\left[\sqrt{1+\frac{16}{9}}+\frac{4}{3}\right] = \frac{c}{a}\ln 3$$

وبذلك فإن الفترات الزمنية المطلوبة للمشاهدين الثلاثة هي بالترتيب

$$S \ :\ T = \frac{4}{3}\cdot\frac{c}{a}, \qquad P \ :\ T_p = \frac{4}{3}\cdot\ln 3, \qquad Q \ :\ T_Q = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{a}$$

إجابة السؤال 2-a:

متجه العجلة عند المشاهد S هو

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \frac{du_x}{dt}\hat{i} + \frac{du_y}{dt}\hat{j} + \frac{du_z}{dt}\hat{k}$$

وعند المشاهد S' يكون

$$\vec{a'} = a_{x'}\hat{i} + a_{y'}\hat{j} + a_{z'}\hat{k} = \frac{du_{x'}}{dt}\hat{i} + \frac{du_{y'}}{dt}\hat{j} + \frac{du_{z'}}{dt}\hat{k}$$

ومن تفاضلات المعادلات

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x},\ u_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x},\ u_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$$

نجد

$$du_{x'} = \frac{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)du_x - (u_x - v)\left(-\frac{v}{c^2}du_x\right)}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)du_x}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}$$

$$du_{y'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left[\frac{du_y}{1-\frac{v}{c^2}u_x} + \frac{u_y}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\left(\frac{v}{c^2}du_x\right)\right]$$

وإذا قسمنا المعادلتين على التفاضل

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) = \gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)dt$$

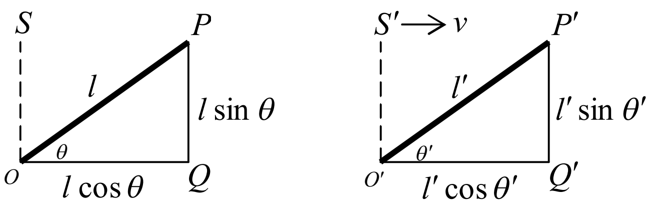
فإننا نجد

$$\frac{du_{x'}}{dt'} = \frac{(1-v^2/c^2)^{3/2}}{(1-vu_x/c^2)^3}\cdot\frac{du_x}{dt}$$

$$du_{y'} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2}\cdot\frac{du_y}{dt} + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{u_y}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^3}\cdot\frac{du_x}{dt}\right]$$ وعلى هذا فإن تحويلات لورنتز لمركبات متجه العجلة تصبح

$$a_{x'} = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^3},\quad a_{y'} = \frac{a_y}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^2} + \frac{v}{c^2}u_y\frac{a_x}{\gamma^2\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)^3}$$

إجابة السؤال 2-b:



إذا اعتبرنا حدث انبعاث الضوء عند اللحظة $t = 0 = t'$ فإن إحداثيات هذا الحدث عند كل من S', S هو $(0,0,0,0)$ ولكن حدث امتصاص الضوء يكون له الإحداثيات التالية

$S\ \ (l\cos\theta, l\sin\theta, 0, \tau)\qquad l = c\tau$

$S'\ (l'\cos\theta', l'\sin\theta', 0, \tau')\qquad l' = c\tau'$

ومن تحويل لورنتز للإحداثيات ينتج إذن

$$l'\cos\theta' = \gamma\,(l\cos\theta - v\tau) = \gamma\, l(\cos\theta - \beta)$$

$$l'\sin\theta' = l\sin\theta$$

$$\tau' = \gamma\,(\tau - vl\cos\theta/c^2) = \gamma\,\tau(1-\beta\cos\theta)$$

وهـذه المعادلــة الأخيــرة تعطينــا الــزمن المطلــوب τ' وينــتج فــورا أن المســافة المطلوبــة هــي $l' = \gamma\, l(1-\beta\cos\theta)$ وهو ما يمكن تأكيده أيضا من المعادلتين الأولى والثانية

$$\begin{aligned} l'^2 &= \gamma^2 l^2 (\cos\theta - \beta)^2 + l^2 \sin^2\theta \\ &= \gamma^2 l^2 \left[\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta + \beta^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta\right] \\ &= \gamma^2 l^2 \left[1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2 (1-\sin^2\theta)\right] \\ &= \gamma^2 l^2 (1-\beta\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

****