**جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيــات**

**الفرقة الرابعة( تخلف من ثالثة)- تربية عام (رياضيات - لائحة قديمة)**

**الفصل الدراسي الأول**

**يوم الامتحان: الأربعاء 30 /12 /2015 م**

**المادة : رياضيات تطبيقية (النظرية النسبية الخاصة)**

**أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد**

**مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم**

**صورة من الامتحان+ نموذج إجابته**

كليـة : التربية　　　　　الفرقة الرابعة (تخلف ثالثة-لائحة قديمـة)　　　　التاريخ: 2015/12/30
شعبة : الرياضيات　　　　　تطبيقية (نسبيـة + متصلـة)　　　　　الزمن : ثلاث ساعات

==================================================

## ثانياً: النظرية النسبية الخاصة

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

| | |
|---|---|
| 1-a | اذكر تجارب ألبرت اينشتاين الذهنية والتي استنتج منها نتائج جديدة في النظرية النسبية الخاصة ثم تكلم عن أحداهما بالتفصيل؟ |
| 1-b | جسمين $Q,P$ يتحركان على محور $x$ بالنسبة للمشاهد $S$ حسب القانونين<br>$P \quad : \quad x=\dfrac{c}{a}\sqrt{c^2+a^2t^2}$<br>$Q \quad : \quad x=\dfrac{c}{2}t+\dfrac{c^2}{a}$<br>وعلى ذلك فإنهما يتلاقيا في اللحظتين الزمنيتين $t=0,T$ . أحسب الفترة الزمنية بين تلاقيهما حسب كل من المشاهدين $S,P,Q$. |
| 2-a | إذا تحركت نقطة مادية فان متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد $S$ هو<br>$\vec{u}=\hat{i}u_x+\hat{j}u_y+\hat{k}u_z$<br>ويكون متجه السرعة $\vec{u}'$ عند المشاهد $S'$ هو<br>$\vec{u}'=\hat{i}u_{x'}+\hat{j}u_{y'}+\hat{k}u_{z'}$<br>أوجد تحويلات لورنتز التي تربط بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u}'$ ؟ |
| 2-b | إشارة ضوئية انطلقت من $O$ وامتصت في النقطة $P$ على مسافة $l$ من $O$ حيث الزاوية $POX$ هي $\theta$ عند $S$. أوجد الزمن $\tau'$ والمسافة $l'$ بين انبعاث الضوء وامتصاصه عند المشاهد $S'$ ؟ |
| 3 | اثبت أن قيمة الكتلة المتحركة $m$ بالسرعة $\upsilon$ تكون أكبر من قيمتها و هى ساكنة $m_0$ وأنها تتبع العلاقة $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ ؟<br>حيث $c$ تمثل سرعة الضوء في الفراغ. |

**انتهت الأسئلة**

**وتمنياتى لكم بالتوفيق**

د. /خليل محمد

## إجابة السؤال 1-a:

**التجارب الذهنية**

أ- الأطوال العرضية على الحركة **(Transverse Length).**

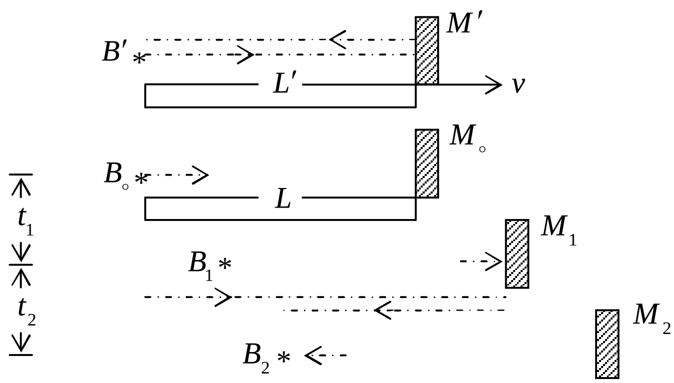
ب- الاسترخاء الزمني **Time Dilation**

ت- الانضغاط الطولي **Length contraction**

ث-عدم تزامن الساعات أثناء الحركة **Unsynchronization of moving clocks**

ج- الزمن الخصوصي والطول الخصوصي **Proper Time and Proper Length**

ثم نتكلم عن تجربة الانضغاط الطولي مثلا حيث اعتبر أينشتين التجربة الذهنية الموضحة بالرسم كما يلي




وهنا نعتبر الطول $L'$ ساكنا بالنسبة للمشاهد $S'$ وبذلك فإنهما يتحركان بسرعة $v$ بالنسبة للمشاهد $S$ ويكون مقدار هذا الطول متحركا على امتداد محور $x$ هو $L$ . وإذا وضعنا مرآة $M'$ على الطرف لأيمن للطول $L'$ وأرسلنا إشارة ضوئية من الطرف الآخر $B'$ فإن الفترة الزمنية التي تلزم لذهاب الإشارة الضوئية إلى المرآة ثم الانعكاس والعودة إلى نقطة البداية هي $\Delta t' = 2L'/c$ ومن الواضح أن هذه الفترة الزمنية تكون بين حدثين واقعين في نفس المكان عند $S'$ حيث خرجت الإشارة الضوئية من $B'$ ثم عادت إلى نفس النقطة $B'$ . وإذا بحثنا كيف يرى المشاهد $S$ هذين الحدثين وبالطبع تكون الفترة الزمنية $\Delta t$ بينهما حسب العلاقة

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

ومن الواضح أن الإشـــــارة الضوئية تبدأ عند النقطة $B_\circ$ وتصل إلى المرآة عند الوضع $M_1$ وليس $M_\circ$ ثم تنعكس وتعود لكي تصل إلى طرف البداية عند الوضع $B_2$ وذلك لأن الطول $L$ متحرك أيضا أثناء مسيرة الضوء ، وهذا الطول $L$ هو دائماً المسافة بين النقطتين $M, B$ أي أن

$$L = B_\circ M_\circ = B_1 M_1 = B_2 M_2$$

والآن يمكننا حساب الفترة الزمنية بين خروج الإشارة الضوئية وعودتها حيث أنها مجموع زمني رحلتي الذهاب والعودة وكما يتضح من الرسم

$$\Delta t = t_1 + t_2$$

$$B_\circ M_1 = ct_1 = L + vt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$M_1 B_2 = ct_2 = L - vt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L}{c+v}$$

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) عن كل من $\Delta t', \Delta t$ نجد أذن

$$\frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{2L'}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad \therefore L' = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة توضح أن الطول الثابت $L'$ عند المشاهد $S'$ سوف يكون قياسه عند $S$ هو الطول المتحرك $L$ ومقداره أقل من $L'$ إذا كانت الحركة موازية لهذا الطول .

## إجابة السؤال 1-b:

عندما يتلاقى الجسمين يكون موقعهما على محور $x$ واحداً أي عندما $x_p = x_Q$ حيث نجد إذن

$$c^2 + a^2t^2 = \left(\frac{a}{2}t + c\right)^2 = \frac{a^2t^2}{4} + cat + c^2$$

$$\left(\frac{3}{4}at - c\right)at = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \quad , \quad \frac{4c}{3a}$$

ويتضح مباشرة أن الفترة الزمنية بين تلاقي الجسمين بالنسبة للمشاهد $S$ هي $T = 4c/3a$

وحيث أن الجسيم $Q$ يتحرك بسرعة منتظمة $\dot{x}_Q = c/2$ فإن الفترة الزمنية $T_Q$ حسب ساعات $Q$ هي فترة خصوصية (proper) وقيمتها إذن

$$T_Q = T\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}T$$

أما بالنسبة لساعات $P$ فإن سرعتها غير منتظمة حيث نجد $\dot{x}_p = \dfrac{cat}{\sqrt{c^2 + a^2t^2}}$ ، ولكن إذا اعتبرنا العنصر التفاضلي $dt$ بالنسبة للمشاهد $S$ فإن نظيره العنصر التفاضلي $dt_p$ بالنسبة للجسيم $P$ تكون خصوصية (proper) وتصبح

$$dt_p = dt\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}_p}{c}\right)^2} = \frac{c\,dt}{\sqrt{c^2 + a^2t^2}}$$

وبذلك تكون الفترة الإجمالية $T_p$ حسب ساعات $P$ هي

$$T_p = \int_0^{T_p} dt_p = \int_0^T \frac{c\,dt}{\sqrt{c^2 + a^2t^2}}$$

ولحساب هذا التكامل نستخدم التعويض

$$at = c\tan\theta \quad , \quad adt = c\sec^2\theta\, d\theta$$

$$T_p = \frac{c}{a}\int_0^T \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{a}\int_0^T \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{c}{a}\left[\ln(\sec\theta + \tan\theta)\right]_0^T = \frac{c}{a}\ln\left[\sqrt{1+\frac{a^2T^2}{c^2}} + \frac{aT}{c}\right]$$

$$= \frac{c}{a}\ln\left[\sqrt{1+\frac{16}{9}} + \frac{4}{3}\right] = \frac{c}{a}\ln 3$$

وبذلك فإن الفترات الزمنية المطلوبة للمشاهدين الثلاثة هي بالترتيب

$$S \;:\; T = \frac{4}{3}\cdot\frac{c}{a}, \qquad P \;:\; T_p = \frac{4}{3}\cdot\ln 3, \qquad Q \;:\; T_Q = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{a}$$

## إجابة السؤال 2-a:

إذا تحركت نقطة مادية فإن متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد $S$ هو

$$\vec{u} = u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j} + u_z\,\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

ويكون متجه السرعة $\vec{u'}$ عند المشاهد $S'$ هو

$$\vec{u'} = u_{x'}\,\hat{i} + u_{y'}\,\hat{j} + u_{z'}\,\hat{k} = \frac{dx'}{dt'}\hat{i} + \frac{dy'}{dt'}\hat{j} + \frac{dz'}{dt'}\hat{k}$$

ومن معادلات تحويل لورنتز للإحداثيات يمكننا الآن إيجاد العلاقة بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ حيث نجد

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad , \quad dy' = dy$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \quad , \quad dz' = dz$$

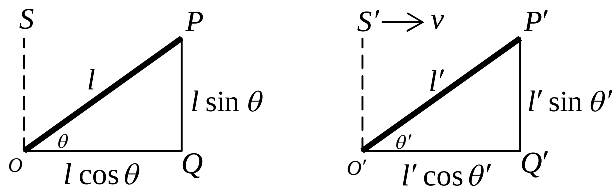
$$u_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

$$u_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

وبما أن السرعة في اتجاه $x - x'$ فإنه يلاحظ أن المركبة $u_{z'}$ تعامل مثل المركبة $u_{y'}$ وأن $u_x$ تظهر دائما في المقام وبهذا فإن معادلات تحويل لورنتز لمركبات السرعة هي

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

## إجابة السؤال 2-b:




إذا اعتبرنا حدث انبعاث الضوء عند اللحظة $t=0=t'$ فإن إحداثيات هذا الحدث عند كل من $S', S$ هو $(0,0,0,0)$ ولكن حدث امتصاص الضوء يكون له الإحداثيات التالية

$$S\ \ (l\cos\theta, l\sin\theta, 0, \tau) \qquad l = c\tau$$

$$S'\ (l'\cos\theta', l'\sin\theta', 0, \tau') \qquad l' = c\tau'$$

ومن تحويل لورنتز للإحداثيات ينتج إذن

$$l'\cos\theta' = \gamma\,(l\cos\theta - v\tau) = \gamma\, l(\cos\theta - \beta)$$

$$l'\sin\theta' = l\sin\theta$$

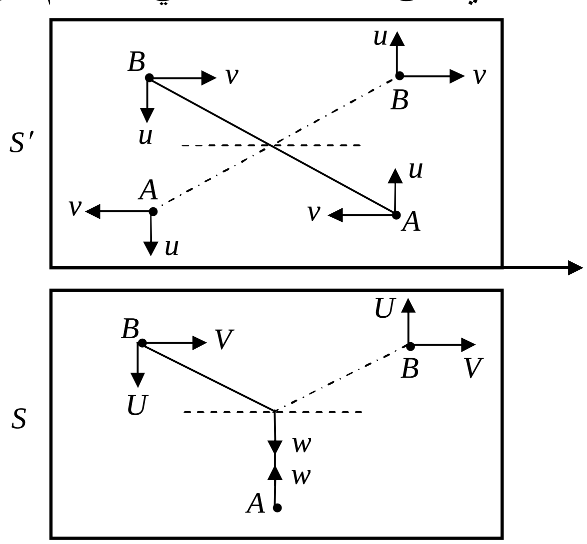
$$\tau' = \gamma\,(\tau - vl\cos\theta / c^2) = \gamma\,\tau(1-\beta\cos\theta)$$

وهذه المعادلة الأخيرة تعطينا الزمن المطلوب $\tau'$ وينتج فورا أن المسافة المطلوبة هي $l' = \gamma\, l(1-\beta\cos\theta)$ وهو ما يمكن تأكيده أيضا من المعادلتين الأولى والثانية

$$\begin{aligned} l'^2 &= \gamma^2 l^2 (\cos\theta - \beta)^2 + l^2 \sin^2\theta \\ &= \gamma^2 l^2 \left[\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta + \beta^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta\right] \\ &= \gamma^2 l^2 \left[1 - 2\beta\cos\theta + \beta^2(1-\sin^2\theta)\right] \\ &= \gamma^2 l^2 (1-\beta\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

## إجابة السؤال 3:

نعتبر الجسيمين $B, A$ متماثلين تماما وكتلهما واحدة وحركتهما في اتجاهين مضادين قبل وبعد التصادم بحيث تكون كمية الحركة الكلية لهما ساوي صفرا وذلك عند المشاهد $S'$ الذي يحرك بسرعة $v$ بالنسبة للمشاهد $S$ وفي اتجاه عمودي على القوى الدفعية في التصادم التي هي في اتجاه $y$ .



وإذا كانت هذه السرعة النسبية تساوي المركبة في اتجاه $x$ لسرعة أحد الجسيمين $B$ فإن التصادم عند المشاهد $S$ يبدو غير متماثل وبحيث تصبح حركة الجسيم الآخر $A$ في اتجاه $y$ فقط . وبذلك تكون متجهات السرعات لكل من الجسيمين قبل وبعد التصادم وعند كل من المشاهدين $S',S$ كما يلي

| | قبل التصادم | بعد التصادم |
|---|---|---|
| $S':$ | $\overrightarrow{v_A} = -v\hat{i} + u\hat{j}$ | $\overrightarrow{v_{A'}} = -v\hat{i} - u\hat{j}$ |
| | $\overrightarrow{v_B} = v\hat{i} + u\hat{j}$ | $\overrightarrow{v_{B'}} = v\hat{i} + u\hat{j}$ |
| $S:$ | $\overrightarrow{v_A} = w\hat{j}$ | $\overrightarrow{v_{A'}} = -w\hat{j}$ |
| | $\overrightarrow{v_B} = v\hat{i} - u\hat{j}$ | $\overrightarrow{v_{B'}} = v\hat{i} + u\hat{j}$ |

ويلاحظ ببساطة أن التصادم عند $S$ هو نفسه الذي عند $S'$ إذا أجرينا دورانين كل بزاوية $\pi$ حول محور $x$ ثم محور $y$ مع تثبيت نقطة الصادم وإذا تم تبديل الجسمين مع بعضهما البعض . وعندما نستخدم معادلات تحويل لورنتز للسرعات نجد

$$u_y = \frac{u_{y'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_{x'}} \qquad : \qquad u = w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ومن قانون حفظ كمية الحركة في اتجاه $y$ عند أي من المشاهدين $S',S$ فإن

$$m(\sqrt{u^2+v^2})\cdot u = m(w)\cdot w$$

$$m(\sqrt{u^2+v^2}) = \frac{m(w)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة تؤدي إلى نفس النتيجة السابقة عندما نجعل $w \to 0$ فإن $u \to 0$ وتصبح المعادلة إذ ن $m(v) = \dfrac{m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ أي انه إذا شوهد أي جسيم يتحرك بالسرعة $v$ تكون كتلته $m = \dfrac{m_\circ}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ حيث $m_\circ$ هي كتلة الجسيم عندما يكون ساكنا وذلك حتى نحافظ على قانون حفظ كمية الحركة .

*************************