جامعة بنها **نموذج اجابة** **رابعة رياضيات**

كلية التربية عام **المادة : موائع+نسبية**

قسم الرياضيات **جزء ديناميكا الموائع(الزمن ساعة واحدة)** **الأحد: 2016/1/10**

<u>أجب عن سؤالين فقط مما يلى (الدرجة الكلية 120 درجة موزعة بالتساوى على الأسئلة)</u>

1-أ- اكتب بدون برهان الصور المختلفة لمعادلة الأتصال .

ب- اذا دار مائع كجسم متماسك بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور z الرأسى وكانت قوة الجاذبية الأرضية هى القوة الوحيدة الخارجية المؤثرة على المائع ,أوجد الضغط الواقع على المائع .

ج- ادرس بالتفصيل مع الرسم الأنسياب لمائع دالة جهده هى $a\ ,\ \ \varphi = a(x^2 - y^2)$ عدد حقيقى $a > 0$ موجب, موضحا" خطوط الأنسياب واتجاهها , خطوط تساوى الجهد .ادرس الحالة الخاصة لهذا المائع .

2- أ- <u>اذكر ماتعرفه عن :-</u> معادلة برنولى – معادلات أويلر لحركة مائع غير لزج بدون برهان.

ب- استنتج العلاقة بين فيض المائع Q ودالة الأنسياب ψ خلال منحنى AB موجود فى المائع.

ج- كرة نصف قطرها a تتحرك بسرعة U فى مائع ساكن .اذا كانت الحركة غير دورانية ,أوجد دالة جهد السرعة وأثبت أن طاقة حركة المائع $\frac{1}{4}MU^2$, M كتلة المائع المزاح.

---

3 – أ- <u>اذكر ماتعرفه عن</u> :- الحركة فى بعدين – شروط كوشى- ريمان – الوسط المتصل .

ب- أدرس الأنسياب لمائع دالة جهده هى $\varphi = -\ln r$ موضحا" مع الرسم خطوط الأنسياب ,خطوط تساوى الجهد .ماذا يمثل هذا الأنسياب.

ج- أنبوبة مستقيمة ذات مقطع منتظم على شكل زاوية قائمة ثبتت بحيث يكون أحد أضلاع الزاوية القائمة أفقيا والأخر رأسيا والسائل يملأ الجزء الرأسى على ارتفاع l والأفقى على بعد l من الرأسى حيث يوجد صنبور مغلق فاذا فتح الصنبور ووجد بعد زمن t أن سطح السائل فى الجزء الرأسى قد انخفض مسافة z فأثبت أن $z = l(1 - \cos\omega t)$ حيث $\omega^2 = {g}/{2l}$

(مع أطيب تمنياتى بالتوفيق . أ.د/ محمود عبد العاطى).

نموذج اجابة ديناميكا الموائع(رابعة تربية رياضيات عام)

<u>اجابة السؤال الأول</u>(40 درجة)

<u>أ-الصور المختلفة لمعادلة الأتصال</u> (8 درجات)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho \vec{q}) = o \qquad (6)$$

و هذه هي الصيغة النهائية لمعادلة الاتصال . و هناك صيغ اخرى يمكن بها كتابة هذه المعادلة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{q}) = o \qquad (6)'$$

و لكن

$$div(\rho \vec{q}) = \vec{\nabla}.(\rho \vec{q}) = \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q})$$

فتكون معادلة الإتصال هي

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o$$

و لكن من العلاقة السابقة

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{q}.\vec{\nabla})\rho$$

و بذلك نحصل على الصورة التالية لمعادلة الإتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o \qquad (7)$$

إذا كان السائل غير قابل للإنضغاط اى ان الكثافة ثابتة $\frac{d\rho}{dt} = o$

و هذه المعادلة في الاحداثيات الكارتزية تصبح

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=o$$

و في الاحداثيات القطبية

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V\varphi}{\partial V}=o$$

و في الاحداثيات الإسطوانية تأخذ الصورة

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RV_R\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial V\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=o$$

ب- حيث أن السرعة الزاوية الثابتة هي w , بفرض أن $\underline{r}$ هو متجه موضع نقطة على المائع. (12 درجة)

∴ سرعة هذه النقطة

$$\underline{w}\wedge\underline{r}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ o & o & w\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=-wy\underline{i}+wx\underline{j}+o.\underline{k}$$

مركبات السرعة هي $(-wy, wx, o)$

مركبات القوى الخارجية $(o, o, -g)$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية لوحدة الكتل

بتطبيق معادلات اويلر للحركة للحصول على الضغط و حيث ان الحركة مستقرة

$$\frac{\partial q}{\partial t}=o$$

$$o+o+wx(-w)+o=o-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$o+-wy(w)+o+o=o-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{y}$$

$$o + o + o + o = -g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

و لكن

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$= \rho w^2(xdx + ydy) - \rho gdz$$

$$\therefore p = \frac{\rho w^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + c$$

ج- نفرض أن الحركة المستوية معطاه بدالة الجهد

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \qquad (1)$$

حيث a ثابت حقيقي موجب أى أن $a > o$ يجب أن نلاحظ انه إذا عرفت φ أمكن معرفة ψ و العكس صحيح إذا أن

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

و بالتكامل نجد أن

$$\psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}dy + f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة في x فقط و بالتعويض عن $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ من

$$\psi = \int 2axdy + f(x)$$

$$= 2axy + f(x)$$

و لتعيين الدالة $f(x)$ (دالة في x فقط) نفاضل (2) بالنسبة الى x فنجد أن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay + f'(x)$$

و لكن

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2ay$$

$$\therefore 2ay = 2ay = f'(x)$$

$$\therefore f'(x) = o \quad \Longrightarrow f(x) = const.$$

و بالتعويض في (2) نجد أن

$$\psi = 2axy + const.$$

و بما أن الثابت إختياري فيمكن أخذ ψ بالصورة

$$\psi = 2axy$$

$\therefore$ معادلة الخطوط الإنسيابية هي $\psi = const.$

أى هي $xy = c$

حيث c ثابت .

أى ان مجموعة الخطوط الإنسيابية عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة خطوطها التقريبية هي محاور الأحداثيات.

و إذا كانت $c > o$ فإن x, y تكونان موجبتين معا أو بسالبتين معا و يتبع فرعا القطع الزائدة في الربعين الأول و الثالث.

و إذا كانت $c < o$ فإن فرعي القطع الزائد يقعان في الربعين الثاني و الرابع.

و إذا كانت $c = o$ فإن خطوط الإنسيابية يمثلها محورا الاحداثيات $x = o, y = o$ و تسمى عندئذ بالخطوط الإنسيابية الصفرية (أى المناظرة للقيمة $c = o$) و النقطة التى تكون عندها السرعة مساوية الصفر تسمى بالنقطة الحرجة.

و لإيجاد إتجاه الإنسياب نعتبر نقطة ما M على محور x حيث $y = o \ , x > o$ عند هذه النقطة يكون

$$u_M = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M = (-2ax)_M < o$$

$$v_M = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_M = o$$

اى أن السرعة عند M تكون في الإتجاه السالب لمحور x و يكون الإنسياب كما في الشكل (1) و إذا ساوينا φ بثابت نحصل على منحنيات تساوي الجهد و هي:

$$a(x^2 - y^2) = const.$$

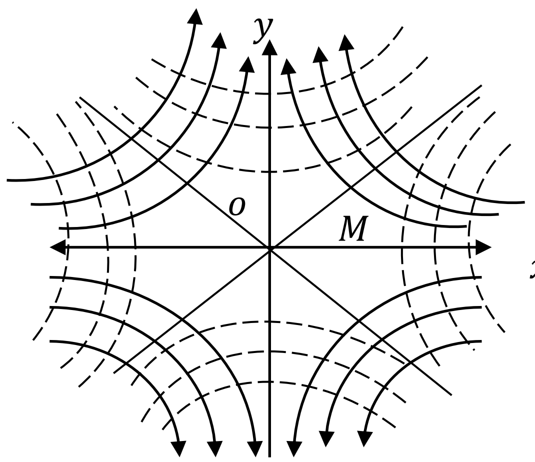
وواضح أنها عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة تتعامد مع المجموعة $xy = c$ أى مع مجموعة الخطوط الإنسيابية.

و خطوط تساوي الجهد مبينة في شكل (1) بخطوط منقطة.

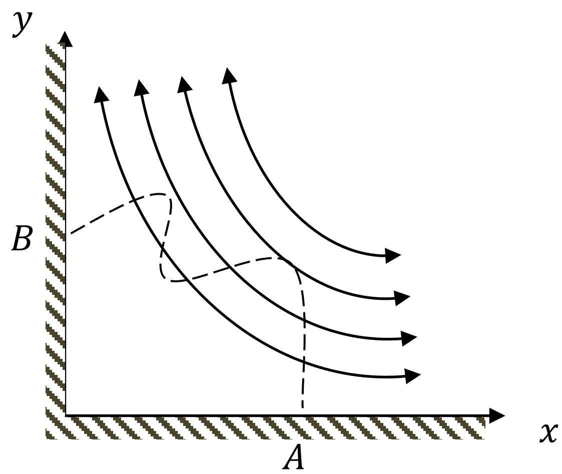
و إذا اخذنا الجزئين الموجبين من المحورين السيني و الصادي (و هي الخطوط الإنسيابية الصفرية) كحائطين صلبين (كمستويين جاسئين) و هذا يمكن عمله دائما في حالة المائع المثالي بسبب عدم وجود اللزوجة, فإن الإنسياب تحت الأعتبار

$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

يمثل إنسيابا داخل زاوية قائمة كما في شكل (2) .



شكل (1)



شكل (2)

و لنبحث الآن تدفق المائع خلال منحنى إختياري AB حيث نهايتاه هما $A(x, o)$, $B(o, y)$ وواضح أن في هذه الحالة يكون:

$$Q = \psi_A - \psi_B = (2axy)_A - (2axy)_B = o$$

و هذا ما يجب ان يكون إذا أن A, B تتعامد مع الخط الإنسيابي و الذي يشمل خطين مستقيمين أى أن حجم المائع الذي يدخل خلال فترة زمنية ما خلال المنحنى AB في المنطقة AoB يساوي حجم المائع الخارج من هذه المنطقة نفسها خلال الفترة الزمنية. (20درجة)

<u>اجابة السؤال الثانى</u>(40 درجة)

<u>أ- معادلة برنولى</u> (4 درجات)

و بالتكامل بالنسبة الى الموضع نجد أن

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\Omega+p=const.=c(t)$$

و هذا الثابت سيكون داله في الزمن إذ أن التكامل سيكون بالنسبة الى الموضع.

هذا المقدار أو التكامل يسمى نتكامل لاجرانج- كوشي و على هذا نستنتج ما يأتى :

المعادلة

$$\frac{1}{2}q^2+\Omega+p=const$$

<u>تسمى بمعادلة برنولى أو التكامل العام لبرنولى</u>

- **<u>معادلات أويلر لحركة مائع غير لزج</u>**(6 درجات)

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad (1)$$

و هي معادلة حركة السائل .

و بالتعويض عن الطرف الأيسر بدلالة العجلة المعطاه الأتجاهيه سابقا نحصل على

$$\frac{d\overline{q}}{dt}=\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}q^2-\vec{q}\wedge\vec{w}=F-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\rightarrow(2)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\vec{q}.\vec{\nabla})\vec{q} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad \rightarrow (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على صورة 3 معادلات قياسية و ذلك بإستخدام الأحداثيات الكارتيزية أى

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

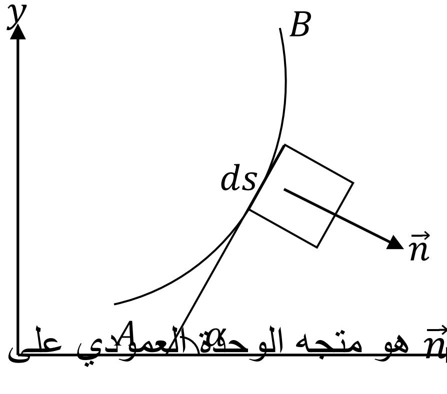
و على ذلك نكون قد حصلنا لأى سائل يتحرك على المعادلات السابقة.

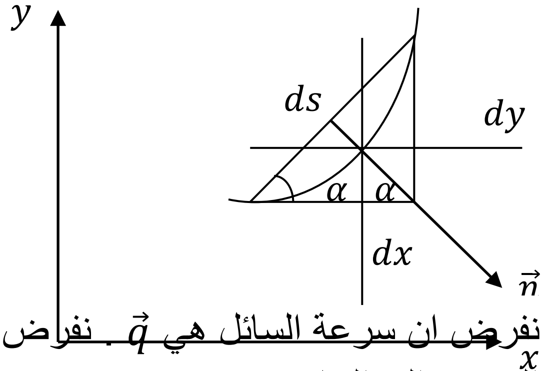
ب- **فيض السائل خلال اى منحنى موجود في السائل (المعنى الطبيعي للدالة ψ):**

يعرف فيض السائل خلال أى منحنى AB موجود في السائل بأنه حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن . (15 درجة)

ملحوظة:

عندما تتكلم عن فيض السائل خلال أى منحنى في المستوى xy فإننا نقصد بذلك فيض السائل خلال سطح إسطوانى له مقطع هو هذا المنحنى و ممتد الى اللانهاية في اتجاه محور z العمودي على المستوى و ذلك خلال وحدة الأطوال من هذه الاسطوانة .





نفرض ان سرعة السائل هي $\vec{q}$. نفرض أن $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج.

بذلك تكون مركبة سرعة السائل في إتجاه عمودي على المنحنى هي $(\vec{n},\vec{q})$.

بأخذ عنصر ds من المنحنى فإن حجم السائل الذي يخترق مساحة من الإسطوانة اللانهائية على هيئة مستطيل طوله يساوى طول الوحدة من الأسطوانة و عرضه

يساوي طول الجزء ds من مقطع الاسطوانة اى طول ds من المنحنى الموجود في المستوى xy و ذلك في وحدة الزمن هو

$$(\vec{n}.\vec{q}).1ds$$

بذلك يكون الحجم الكلي الذي يخترق الأسطوانة التي طولها الوحدة و مقطعها هو المنحنى AB خلال وحدة الزمن هو

$$Q=\int_A^B(\vec{q}.\vec{n})ds$$

و لكن المتجه $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج و هذا المتجه كما هو واضح من الرسم سوف يميل بزاوية α على الرأس الى أسفل حيث α هي زاوية ميل المماس للمنحنى فيكون

$$\vec{n}=1.\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j}$$

لأن طوله الوحدة أى

$$\vec{n}=\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j}$$

أما المتجه $\vec{q}$ فهو

$$\vec{q}=u\vec{i}+v\vec{j}$$

و على ذلك يكون الفيض للسائل خلال المنحنى AB هو

$$Q=\int_A^B(\vec{q}.\vec{n})ds=\int_A^B(u\sin\alpha-v\cos\alpha)ds$$

$$=\int_A^B\left(u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}\right)ds$$

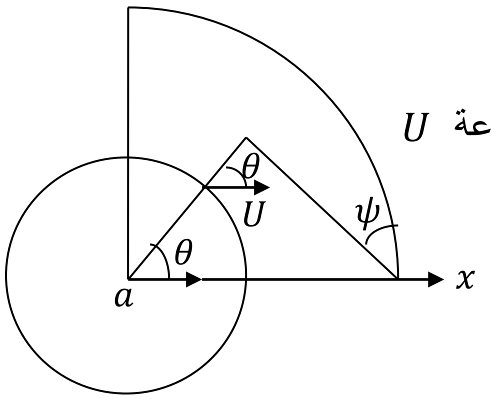
و بالتعويض من معادلة كوشي ريمان (9) بدلا من u, v بدلالة الأنسياب ψ نحصل على الفيض هو

$$Q = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx\right) = \int_A^B d\psi$$

$$\therefore Q = \psi_B - \psi_A \qquad (13)$$

أي أن حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن يساوي الفرق بين دالتي الإنسياب ψ عند نهاية و بداية المنحنى . أى يعتمد فقط على قيمة دالة الانسياب عند نهايتي المنحنى.

ب- بإعتبار المائع محدود بسطح s و كرة كبيرة Σ نصف قطرها R و مركزها عند نقطة أصل التى تحتوى s



ج- أيضا نأخذ محور x في إتجاه السرعة U

الحركة متماثلة حول هذا المحور .

بإستخدام الاحداثيات الكروية r, θ, ψ

φ لا تعتمد على ψ . و لكن تعتمد على r, θ, t . إذا كانت U تعتمد على t و حيث أن الحركة منتظمة

$\therefore$ φ تعتمد على r, θ فقط

$\therefore$ هي تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2 \varphi = o$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{r \sin\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o \qquad (1)$$

و الشروط الحدية

$$\varphi \to o \qquad\qquad as \quad r \to \infty \qquad\qquad (2)$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \qquad\qquad on \quad r = a \qquad\qquad (3)$$

بفرض أن φ على الصورة

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

و هذا ينتج أيضا ناتج من المعادلة (1) بنفس الطريقة السابقة و بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$(2) \Longrightarrow A = o$$

$$(3) \Longrightarrow \frac{2B\cos\theta}{a^3} = U\cos\theta \qquad\qquad i.e. \quad B = \frac{Ua^3}{2}$$

$$\therefore\ \varphi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta$$

و هذا هو جهد السرعة

في هذه الحالة للحصول على طاقة حركة المائع

$$K.E = \frac{1}{2}\rho \int_{r=a} \varphi x - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int \frac{Ua\cos\theta}{2} xU\cos\theta\,ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int cos^2\theta ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{\theta=o}^{\pi}\int_{\tau=o}^{2\pi} cos^2\theta . a^2 \sin\theta \, d\theta d\psi$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{o}^{\pi} cos^2\theta . 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\rho U^2 a^3 \pi . \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi a^2 \rho\right) U^2$$

$$= \frac{1}{4} M U^2$$

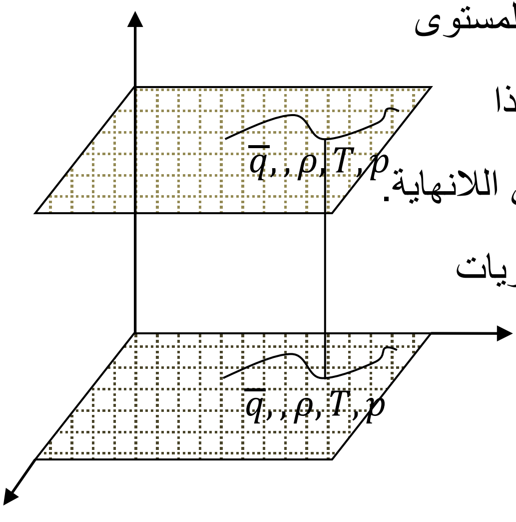
حيث M هي كتلة السائل المزاح .   (15 درجة)

<u>اجابة السؤال الثالث</u>(40 درجة)

1- <u>تعريف الحركة في بعدين</u>:((3 درجات)

إذا كانت المتغيرات للحركة لا تعتمد على البعد الثالث و ليكن المتغيرz مثلا (في الأحداثيات الكارتيزية) كذلك تكون السرعة في هذا الإتجاه تساوى صفر أى أن

$$w = o \qquad , \quad \frac{\partial}{\partial z} = o$$



فمثلا إذا تكلمنا عن أى منحنى أو أى خط في هذا المستوى فإن هذا يعنى أننا نتكلم عن إسطوانة لها المقطع هذا المنحنى و ممتدة الى اللانهاية أو مستوى ممتد الى اللانهاية. يكفي لدراسة هذه الحركة دراستها في إحدى المستويات العمودية على البعد الثالث z لأنه في جميع المستويات تكون الحركة متشابهه.

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = +\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (3\ piont)$$

المعادلات السابقة هي نفسها شروط كوشي ريمان لوجود الدالة التحليلية $w(z)$ كدالة في العدد المركب $z = x + iy$ في المستوى المركب z على الصورة

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

$$= \varphi + i\psi$$

هذه الدالة تسمى بدالة الجهد المركب w

الوسط المتصل ☹(3 درجات)

هو الوسط الذي فيه توزيع دوال الكثافة أو الكتلة و جميع الخواص الطبيعية للوسط تكون دوال متصلة .

فمثلا في الميكانيكا النظرية ندرس حركة الأجسام المادية أو أجسام منفصلة عن بعضها و كذلك دراسة حركة الأجسام الصلبة و لكن في ميكانيكا الوسط المتصل فإننا ندرس مثل هذه الحركة للأجسام الصلبة و لكن الذي تملأ الفراغ بصورة متصلة بدون انقطاع و المسافات بين النقط في أثناء الحركة سوف تتغير .

ب- نفرض أن جهد السرعة لحركة مستوية لمائع غير قابل للإنضغاط هو(13 درجة)

$$Q = -\ell n\sqrt{x^2 + y^2}$$

و بإستخدام الأحداثيات القطبية تكون بالصورة

$$Q = -\ell n\, r$$

لدراسة هذا الإنسياب نوجد أولا دالة الإنسياب كالآتى:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$\therefore \psi = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + f(x)$$

و لكن

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore \psi = -\int \frac{x}{x^2 + y^2} + f(x)$$

$$= -\tan^{-1}\frac{y}{x} + f(x)$$

و لإيجاد ثابت التكامل $f(x)$ نفاضل المعادلة الأخيرة بالنسبة الى x فنجد أن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)}\left(\frac{-y}{x}\right) + f'(x)$$

و لكن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad (\psi, \varphi \text{ العلاقة بين })$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2} + f'^{(x)} \qquad (\text{من المعادلة الأخيرة})$$

$$\therefore f'(x) = o \quad \Longrightarrow f(x) = const.$$

و بالتعويض في دالة الأنسياب ψ

$$\therefore \psi = -\tan^{-1}\frac{y}{x} + const.$$

و بما أن ثابت إختياري ∴ يمكن أن تأخذ دالة الإنسياب الصورة

$$\psi = -\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

و لكن

$\psi = const.$

$$\therefore \tan^{-1}\frac{y}{x} = const. = c$$

حيث c ثابت إختياري.

و كما نعلم فإن سرعة المائع ذات الجهد هي

$$\overline{q} = -grad\ \varphi = \overline{\nabla}\ell n\, r = \frac{\partial}{\partial r}\ell n\, r$$

$$= \frac{1}{r}\underline{\hat{r}} = \frac{r}{r^2}$$

حيث $\underline{\hat{r}}$ هو متجه الوحدة , $\underline{r}$ متجه الموضع و عند نقطة الأصل نجد أن السرعة يحدث بها عدم إتصال اى تصل قيمتها الى اللانهاية. و هذا يسمى ان هناك إضافة حدية للمائع (إضافة موجبة و يطلق عليها منبع او إضافة سالبة يطلق عليها مصب) .

و على وجه العموم فإن حجم المائع Q المتدفق في وحدة الزمن (ثانية واحدة) يمكن حسابه بأخذ دائرة نصف قطرها r و مركزها نقطة الاصل و يكون حجم المائع المتدفق في وحدة الزمن هو

$$Q = 2\pi r\overline{q}$$

$$= -2\pi r\vec{\nabla}\varphi$$

و في حالة إعتبار دالة الجهد دالة في r فقط أى أن

$$\varphi = \varphi(r)$$

فإن

$$\therefore Q = -2\pi r\frac{d\varphi}{dr} \qquad \left(\text{لأن}\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr}\right)$$

$$\therefore d\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{r}dr$$

فإذا كانت Q ثابتة فإن

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ell n\, r$$

و يمكن بسهولة إثبات أن

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta$$

و على ذلك فإننا درسنا فيما سبق منبعا قدرته

$$Q = 2\pi$$

فإذا كان حجم المائع المتدفق في الثانية الواحدة هو

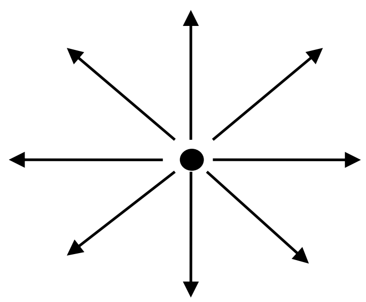
$$Q = 2\pi m$$

فإن m تسمى بشدة المنبع *strength* او بعبارة أخرى يعرف المنبع ذو الشدة m بأن الفيض خلال أى منحنى يحيط به يساوي $2\pi m$.

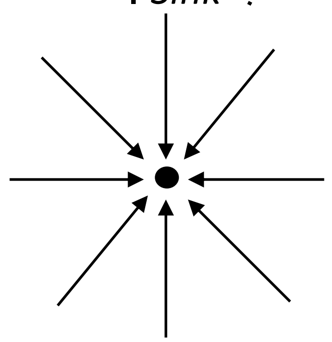
و بذلك يمكن كتابة كل من ψ, φ كالآتى:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -m\,\ell n\, r \;, \\ \psi &= -m\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

و في الحالة التى ينساب فيها المائع في إتجاه مضاد أى يدخل الى نقطة الأصل بأشعة مستقيمة فإن الانسياب في هذه الحالة يسمى بالمصب *Sink* .



منبع

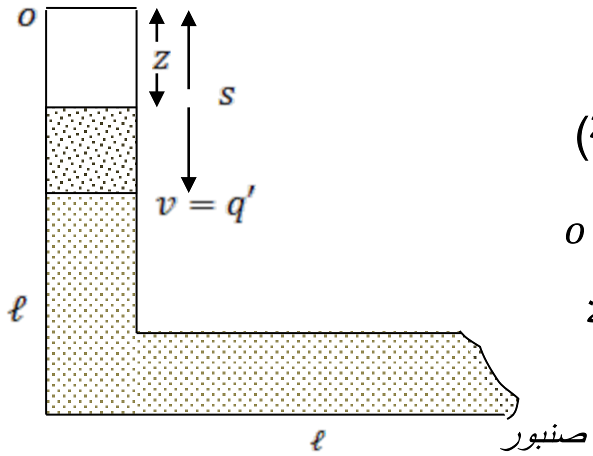


مصب

$\therefore$ في حالة المصب يكون

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= m\,\ell n\, r \\ \psi &= m\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

(الأختلاف في الإشارة فقط) حيث m شدة المصب او بمعنى آخر ; المصب هو منبع شدته $(-m)$.



الحل(18 درجة)

ج-نفرض أن s بعد أى نقطة في السائل عند o

و أن q' سرعة اى نقطة A في إتجاه الأنبوبة

من معادلة الاتصال $\vec{\nabla}.\vec{q} = o$

$$\therefore \frac{\partial q'}{\partial s} = o \qquad (1)$$

$\overline{q}$ ليست لها سوى مركبة رأسية واحدة بالنسبة الجزء الرأسي و تمثل (1) معادلة الإتصال . أى ان q' لا تعتمد على s $\left(\frac{\partial q\prime}{\partial s} = o\right)$ و هي بالتالى تساوى سرعه هبوط السائل

$$q' = z' \qquad (2)$$

و لكن الحركة غير دورانية $\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{q} = o\right)$ و بإدخال جهد السرعة ϕ $(\vec{q} = -\vec{\nabla}\phi)$ أى أن $q' = -\frac{\partial \phi}{\partial s}$ و بالتكامل بالنسبة الى s

$$\therefore \phi = -q'.s + \cos t \qquad (3)$$

من معادلة برنولى

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial \phi}{\partial t} = const. \qquad (4)$$

و لكن

$$q = q' = \dot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$\therefore \frac{1}{2} z^{-2} + s\ddot{z} + \Omega + \frac{p}{\rho} = const. \qquad (5)$$

إذا كانت النقط A في الجزء الرأسي من الأنبوبة فإن

$\Omega = - \swarrow g . s \searrow$ داله جهد و

الموضوع

البعد الرأسي عن نقطة ثابتة عجلة الجاذبية

أما إذا كانت في الجزء الأفقى من الأنبوبة

$\Omega = - \swarrow g y \searrow$ داله الجهد و

الموضع

البعد الرأس من نقطة ثابتة عجلة الجاذبية

من (5) نجد أن .... الضغط الجوى عند السطح الحر $p = p_o$

$$s = z \qquad , \qquad s = z + 2\ell$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} z^{\cdot 2} + z\ddot{z} - gz + \frac{p_o}{\rho} = const \\ &\frac{1}{2} z^{\cdot 2} + (z + 2\ell)\ddot{z} - g\ell + \frac{p_o}{\rho} = const \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

و بالطرح نجد أن

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2\ell}(z - \ell)$$

$$\therefore \ddot{z} = -\left(\frac{g}{2\ell}\right) z + const \qquad (7)$$

و على ذلك تكون الحركة هي ح,ت,ب, زمنها الدوري

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\therefore (z-\ell) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\,t+\alpha\right) \qquad (8)$$

تعيين الثوابت A, α عندما $t = o$ فإن

$$z = o \qquad , \quad z^{\cdot} = o$$

$$\therefore A = -\ell \qquad , \quad \alpha = o$$

$$z = \ell\left[1-\cos\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\,t\right] \qquad (9)$$

لإيجاد الضغط عند أى لحظة نوجد أولا الثابت في المعادلة (6) ثم نعوض في المعادلة (4).

تمت الأجابة النموذجية

ا.د.محمود عبد العاطى محمود