جامعة بنها . كلية العلوم بسم الله الرحمن الرحيم الفرقة الرابعة تربية أساسي (لائحة جديدة): شعبة رياضيات

قسم الرياضيات امتحان دور سبتمبر لعام2014 /2015 م مادة (الإحصاء) الزمن : ساعاتان

إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة كلية تربية أساسي (لائحة جديدة): شعبة رياضيات المادة : الإحصاء

يوم الأمتحان :الثلاثاء 8 / 9 / 2013 م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

السؤال الأول : أ .

دالة الترجيح هى :

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

وبالتالى فأن

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-n\ln\sigma-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$
$$=-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

ولإيجاد قيم μ , σ^2 التى تجعل هذه الدالة نهاية عظمى فإننا نفاضل هذه الدالة جزئيا مرة بالنسبة إلى μ وآخرى بالنسبة إلى σ^2 ومساواتهم بالصفر أى أن

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]$$

وبالتالى فأن

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)(-1)=0$$
$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\sigma^2\neq 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\mu$$
$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

وكذلك بالنسبة للتباين :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right] = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

أى أن $\bar{x}$ هو تقدير للمتوسط μ & $\hat{\sigma}^2$ هو تقدير للتباين σ^2 ويلاحظ أننا استبدلنا μ بالقيمة المقدرة لها $\bar{x}$ وذلك لأنه لايمكن إيجاد تقدير $\hat{\sigma}^2$ بمعلومية قيمة μ المجهولة أصلا .

السؤال الأول : ب .

عند درجة ثقة 95% اي ان $1-\alpha = 0.95$ **نجد أن** $\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$ **ومن الجداول نجد أن** $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ **وبالتالى فأن**

$$n = 400, \bar{x} = 2485, \sigma = 800$$

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2485 - 1.96 \times \frac{800}{\sqrt{400}} < \mu < 2485 + 1.96 \times \frac{800}{\sqrt{400}}$$

$$2406.6 < \mu < 2563.4$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(2406.6 \quad , \quad 2563.4)$.

عند درجة ثقة 9*9% اي ان $1-\alpha = 0.99$ **نجد أن** $\alpha = 0.01, \frac{\alpha}{2} = 0.005$ **ومن الجداول نجد أن** $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$ **وبالتالى فأن**

$$n = 400, \bar{x} = 2485, \sigma = 800$$

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2485 - 2.58 \times \frac{800}{\sqrt{400}} < \mu < 2485 + 2.58 \times \frac{800}{\sqrt{400}}$$

$$2261.8 < \mu < 2708.2$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% هى $(2261.8 \quad , \quad 2708.2)$.

السؤال الثاني : أ .

Y \ X	−5	0	5	q(y)
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0.3	0.1	0.1	0.5
P(x)	0.4	0.3	0.3	1

معامل الارتباط

$$\mu_X = (-5)(0.4) + (0)(0.3) + (5)(0.3) = -0.5$$
$$E[X^2] = (-5)^2(0.4) + (0)^2(0.3) + (5)^2(0.3) = 17.5$$
$$\sigma^2{}_X = E[X^2] - [\mu_X]^2 = 17.5 - (-0.5)^2 = 17.25 \rightarrow \sigma_X = 4.15$$
$$\mu_Y = (1)(0.5) + (2)(0.5) = 1.5$$
$$E[Y^2] = (1)^2(0.5) + (2)^2(0.5) = 2.5$$
$$\sigma^2{}_Y = E[Y^2] - [\mu_Y]^2 = 2.5 - (1.5)^2 = 2.5 - 2.25 = 0.25 \rightarrow \sigma_Y = 0.5$$

ومن جدول التوزيع المشترك يمكن حساب $E[XY]$ كالتالي :

$$E[XY] = (-5\times1)(0.1) + (0\times1)(0.2) + (5\times1)(0.2) + (-5\times2)(0.3) + (0\times2)(0.1) + (5\times2)(0.1) = -1.5$$
$$\therefore Cov[X,Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y = -1.5 - (-0.5)\times(1.5) = 1.86 - 2.1079 = -0.75$$

وبالتالي فإن :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-0.75}{(4.15)(0.5)} = -0.36$$

السؤال الثاني : ب .

هذا المجتمع له الدالة الاحتمالية

X	2	4	6	8
$f(X)$	1/4	1/4	1/4	1/4

يتضح أن هذا التوزيع ليس معتدلا بل يطلق عليه التوزيع المنتظم ويمكن حساب المتوسط والتباين ونجد أن

$$\sigma^2 = 5; \mu = 5$$

الآن نريد سحب عينة من حجم 2 ثم نوجد التوزيع العينى على أن يكون السحب بإرجاع فى هذه الحالة نجد أن عدد العينات الممكنة هى $4^2 = 16$ وهى كالتالى :

$$(2,2),(2,4),(2,6),(2,8)$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(4,8)$$
$$(6,2),(6,4),(6,6),(6,8)$$
$$(8,2),(8,4),(8,6),(8,8)$$

احتمال سحب عينة من هذه العينات هى 1/16 ويكون التوزيع العينى هو :

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8
$P(\overline{X})$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

ويرسم هذا التوزيع نجد أنه يأخذ تقريبا شكل التوزيع المعتدل

$$E\overline{X} = 2\times\frac{1}{16} + 3\times\frac{2}{16} + 4\times\frac{3}{16} + 5\times\frac{4}{16} + 6\times\frac{3}{16} + 7\times\frac{2}{16} + 8\times\frac{1}{16} = 5$$
$$\sigma^2{}_{\overline{X}} = 2^2\times\frac{1}{16} + 3^2\times\frac{2}{16} + 4^2\times\frac{3}{16} + 5^2\times\frac{4}{16} + 6^2\times\frac{3}{16} + 7^2\times\frac{2}{16} + 8^2\times\frac{1}{16} - 5^2$$
$$= 27.5 - 25 = 2.5$$

ونجد أن :

$$\sigma^2{}_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}, E\overline{X} = \mu$$

السؤال الثالث : أ .

خصائص التقدير الجيد

أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator

نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو θ هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها n ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ لتقدير للبارامتر θ التقدير $\hat{\theta}$ ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة n ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بانه تقدير غير متحيز للبارمتر θ إذا كان $E\,\hat{\theta} = \theta$

د . الأتساق Consistency

الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى θ وأن التقدير من العينة هو $\hat{\theta}$ وبالتالى يقال أن : التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر θ عن طريق الاحتمال

أى أن $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right|\geq c\right)\to 1$

حيث c مقدار اختيارى موجب $c > 0$.

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا كان :

1. $\hat{\theta}$ تقديرا غير متحيزا للبارمتر θ
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}\right)\to 0$

هـ الكفاية : Sufficiency

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر θ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر

θ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر θ 0 أى أن

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta\right) = g\left(\theta, \hat{\theta}\right) h\left(x_1, x_2, \ldots, x ; \hat{\theta}\right)$$

السؤال الثالث : ب .

دالة الكثافة الاحتمالية لمجتمع يتبع التوزيع الآسي هى $f(x) = \theta . e^{-\theta . x}\ , 0 < x < \infty$:

من هذه المعادلة يتضح أن دالة الاحتمال $f(x)$ تعتمد على معلمة واحدة وهى θ وبذلك سوف نكون معادلة واحدة وذلك بمساواة العزم الأول المحسوب من دالة الكثافة الاحتمالية بالعزم الأول المحسوب من العينة أى أن

$$\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx =$$

$$= \int x\theta . f(x) e^{-\theta . x} dx = \frac{1}{\theta}$$

والعزم الأول المحسوب من العينة هو :

$$m_1 = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

و بمساواة المعادلتين ينتج أن

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\sum x}{n}$$

أي أن

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x} = \frac{4}{60.1} = 0.067$$

وبذلك تكون دالة التوزيع المقدرة كالآتى :

$$f(x) = 0.067 e^{-0.067 x} \quad , \qquad 0 < x < \infty$$

السؤال الرابع : أ .

$$n_1 = 50, \bar{x}_1 = 65, s_1 = 4$$
$$n_2 = 100, \bar{x}_2 = 60, s_2 = 5$$

فى حالة ما تكون n كبيرة فأننا نستخدم s بدلا من σ

$$D = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 65 - 60 = 5$$
$$\sigma(D) = \sqrt{\frac{16}{50} - \frac{25}{100}} = 0.775$$

اذا أخذنا مستوى ثقة 95% وبالتالى فأن :

$$1-\alpha = 0.95, \alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025, z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

أى أن فترة الثقة هى :

$$(D - 1.96\times\sigma(D), D + 1.96\times\sigma(D))$$
$$(5 - 1.96\times 0.775, 5 + 1.96\times 0.775)$$
$$(3.5, 6.5)$$

أى أن :

$$P[3.5 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6.5] = 0.95$$

وهذا يبين لنا أنه بدرجة ثقة 95% تؤدى الطريقة الخاصة الى رفع متوسط درجات الرياضيات المعاصرة بمقدار يتراوح بين ثلاثة درجات ونصف الى ستة درجات ونصف 0

وكذلك اذا استخدمنا درجة الثقة 99% فسوف نجد أن ارتفاع الدرجات يتراوح بين . 6.9 & 3.1

السؤال الرابع : ب .

إذا كانت $G(y)$ ترمز إلي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y عند النقطة y . فإن

$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \le y) \\
&= P\left(X^3 \le y\right) \\
&= P\left(X \le y^{1/3} \right) \\
&= \int_0^{y^{1/3}} 6x(1-x)dx \\
&= 3y^{2/3} - 2y
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن $g(y) = 2\left(y^{-2/3} - 1\right)$ لكل $0 < y < 1$ ، $g(y) = 0$ بخلاف ذلك .