إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة كلية تربية أساسي (لائحة جديدة): شعبة رياضيات المادة : الإحصاء

يوم الأمتحان :الأحد 10 / 1 / 2016 م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

السؤال الأول : أ .

دالة الترجيح هى :

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

وبالتالى فأن

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-n\ln\sigma-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$=-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

ولإيجاد قيم μ , σ^2 التى تجعل هذه الدالة نهاية عظمى فإننا نفاضل هذه الدالة جزئيا مرة بالنسبة إلى μ وآخرى بالنسبة إلى σ^2 ومساواتهم بالصفر أى أن

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]=0, \qquad \frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]$$

وبالتالى فأن

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\ln L(\mu,\sigma^2)\right]=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2(x_i-\mu)(-1)=0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,\sigma^2\neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\mu$$

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

وكذلك بالنسبة للتباين :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\left[\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)\right]=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$$

$$\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

أى أن $\bar{x}$ هو تقدير للمتوسط μ $\hat{\sigma}^2$ & هو تقدير للتباين σ^2 ويلاحظ أننا استبدلنا μ بالقيمة المقدرة لها $\bar{x}$ وذلك لأنه لايمكن إيجاد تقدير $\hat{\sigma}^2$ بمعلومية قيمة μ المجهولة أصلا .

السؤال الأول : ب .

عند درجة ثقة 95% اي ان $1-\alpha=0.95$ نجد أن $\alpha=0.05, \frac{\alpha}{2}=0.025$ ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ وبالتالى فأن

$$n=400, \bar{x}=2485, \sigma=800$$

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2485-1.96\times\frac{800}{\sqrt{400}}<\mu<2485+1.96\times\frac{800}{\sqrt{400}}$$

$$2406.6<\mu<2563.4$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(2406.6 \quad , \quad 2563.4)$.

عند درجة ثقة 9*9% اي ان $1-\alpha=0.99$ نجد أن $\alpha=0.01, \frac{\alpha}{2}=0.005$ ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}}=2.58$ وبالتالى فأن

$$n=400, \bar{x}=2485, \sigma=800$$

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$2485-2.58\times\frac{800}{\sqrt{400}}<\mu<2485+2.58\times\frac{800}{\sqrt{400}}$$

$$2261.8<\mu<2708.2$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% هى $(2261.8 \quad , \quad 2708.2)$.

السؤال الثاني : أ .

Y \ X	−5	0	5	q(y)
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0.3	0.1	0.1	0.5
P(x)	0.4	0.3	0.3	1

معامل الارتباط

$$\mu_X = (-5)(0.4) + (0)(0.3) + (5)(0.3) = -0.5$$
$$E[X^2] = (-5)^2(0.4) + (0)^2(0.3) + (5)^2(0.3) = 17.5$$
$$\sigma^2{}_X = E[X^2] - [\mu_X]^2 = 17.5 - (-0.5)^2 = 17.25 \rightarrow \sigma_X = 4.15$$
$$\mu_Y = (1)(0.5) + (2)(0.5) = 1.5$$
$$E[Y^2] = (1)^2(0.5) + (2)^2(0.5) = 2.5$$
$$\sigma^2{}_Y = E[Y^2] - [\mu_Y]^2 = 2.5 - (1.5)^2 = 2.5 - 2.25 = 0.25 \rightarrow \sigma_Y = 0.5$$

ومن جدول التوزيع المشترك يمكن حساب $E[XY]$ كالتالي :

$$E[XY] = (-5\times1)(0.1) + (0\times1)(0.2) + (5\times1)(0.2) + (-5\times2)(0.3) + (0\times2)(0.1) + (5\times2)(0.1) = -1.5$$
$$\therefore Cov[X,Y] = E[XY] - \mu_X\mu_Y = -1.5 - (-0.5)\times(1.5) = 1.86 - 2.1079 = -0.75$$

وبالتالي فإن :

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{-0.75}{(4.15)(0.5)} = -0.36$$

السؤال الثاني : ب .

هذا المجتمع له الدالة الاحتمالية

X	2	4	6	8
$f(X)$	1/4	1/4	1/4	1/4

يتضح أن هذا التوزيع ليس معتدلا بل يطلق عليه التوزيع المنتظم ويمكن حساب المتوسط والتباين ونجد أن

$$\sigma^2 = 5; \mu = 5$$

الآن نريد سحب عينة من حجم 2 ثم نوجد التوزيع العينى على أن يكون السحب بإرجاع فى هذه الحالة نجد أن عدد العينات الممكنة هى $4^2 = 16$ وهى كالتالى :

$$(2,2),(2,4),(2,6),(2,8)$$
$$(4,2),(4,4),(4,6),(4,8)$$
$$(6,2),(6,4),(6,6),(6,8)$$
$$(8,2),(8,4),(8,6),(8,8)$$

احتمال سحب عينة من هذه العينات هى 1/16 ويكون التوزيع العينى هو :

$\bar{X}$	2	3	4	5	6	7	8
$P(\bar{X})$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

ويرسم هذا التوزيع نجد أنه يأخذ تقريبا شكل التوزيع المعتدل

$$E\bar{X} = 2\times\frac{1}{16} + 3\times\frac{2}{16} + 4\times\frac{3}{16} + 5\times\frac{4}{16} + 6\times\frac{3}{16} + 7\times\frac{2}{16} + 8\times\frac{1}{16} = 5$$
$$\sigma^2{}_{\bar{X}} = 2^2\times\frac{1}{16} + 3^2\times\frac{2}{16} + 4^2\times\frac{3}{16} + 5^2\times\frac{4}{16} + 6^2\times\frac{3}{16} + 7^2\times\frac{2}{16} + 8^2\times\frac{1}{16} - 5^2$$
$$= 27.5 - 25 = 2.5$$

ونجد أن :

$$\sigma^2{}_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n}, E\bar{X} = \mu$$

السؤال الثالث : أ .

خصائص التقدير الجيد

أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator

نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو θ هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها n ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ لتقدير للبارامتر θ التقدير $\hat{\theta}$ ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة n ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بانه تقدير غير متحيز للبارمتر θ إذا كان $E\,\hat{\theta} = \theta$

د . الأتساق Consistency

الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى θ وأن التقدير من العينة هو $\hat{\theta}$ وبالتالى يقال أن : التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر θ عن طريق الاحتمال أى أن $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right| \geq c\right) \to 1$

حيث c مقدار اختيارى موجب $c > 0$.

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا كان :

1. $\hat{\theta}$ تقديرا غير متحيزا للبارمتر θ

2. $\lim_{n\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}\right) \to 0$

هـ الكفاية : Sufficiency

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر θ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر

θ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر θ 0 أى أن

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta\right) = g\left(\theta, \hat{\theta}\right) h\left(x_1, x_2, \ldots, x ; \hat{\theta}\right)$$

السؤال الثالث : ب .

دالة الكثافة الاحتمالية لمجتمع يتبع التوزيع الآسي هى $f(x) = \theta . e^{-\theta . x}, 0 < x < \infty$:

من هذه المعادلة يتضح أن دالة الاحتمال $f(x)$ تعتمد على معلمة واحدة وهى θ وبذلك سوف نكون معادلة واحدة وذلك بمساواة العزم الأول المحسوب من دالة الكثافة الاحتمالية بالعزم الأول المحسوب من العينة أى أن

$$\mu_1 = EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int x\theta . f(x) e^{-\theta . x} dx = \frac{1}{\theta}$$

والعزم الأول المحسوب من العينة هو :

$$m_1 = \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

و بمساواة المعادلتين ينتج أن

$$\frac{1}{\theta} = \frac{\sum x}{n}$$

أي أن

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum x} = \frac{4}{60.1} = 0.067$$

وبذلك تكون دالة التوزيع المقدرة كالآتى :

$$f(x) = 0.067 e^{-0.067x} , \qquad 0 < x < \infty$$

اجابة السؤال الرابع (أ) :

الفرض العد مي : Null Hypothesis

"وهو الفرض الأصلي الذي نجري حوله الاختبار أو فرض التساوي و يرمز له بالرمز H_0 " وهذا الفرض ينص علي أن قيمة المعلمة (معلمة المجتمع) = قيمة معينة (فرضية) أو بمعني آخر فإن هذا الفرض يفترض عدم وجود فرق حقيقي بين معلمة المجتمع و القيمة الافتراضية وأن أي فرق بينهما يكون راجعا إلى عوامل الصدفة .

الفرض البديل : Alternative Hypothesis

وهو الفرض المعاكس للفرض العد مي ويرمز له بالرمز H_1 وهو يعني أنة هناك فرقا معنويا بين معلمة المجتمع و التقدير الإحصائي التي تم حسابه من العينة أو بعبارة أخري يعني هذا الفرض أن العينة لا تمثل المجتمع بل أنها تنتمي إلى مجتمع آخر .

وهذا الفرض غالبا ما يكون علي الصورة $\neq$ or $>$ or $<$:

اختبار ذو طرف واحد يمين (ذو ذيل يمين)

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $>$ تكون هناك منطقة رفض واحدة إلى اليمين ومساحتها تساوي α

اختبار ذو طرف واحد يسار (ذو ذيل يسار)

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $<$ تكون هناك منطقة رفض واحدة إلى اليسار ومساحتها تساوي α

الاختبار اختبار ذو طرفين (ذو ذيلين).

إذا كان الفرض البديل H_1 علي صورة $\neq$ تكون منطقة الرفض مقسمة إلى منطقتين موزعة بالتساوي ومساحة كل منهما تساوي $\alpha/2$ وذلك علي طرفي التوزيع

1 . خطأ من النوع الأول : Type One Error

يحدث هذا الخطأ عندما يكون القرار الذي تم اتخاذه هو رفض الفرض العد مي علي الرغم من صحته . ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من هذا النوع بالرمز α.

و يسمي هذا الاحتمال بمستوي المعنوية **Significance Level** كما يسمي الاحتمال المكمل $(1-\alpha)$ بدرجة الثقة **Confidence Degree.**

2 . خطأ من النوع الثاني : Type Two Error

يحدث هذا الخطأ عندما يكون القرار الذي تم اتخاذه هو قبول الفرض العد مي علي الرغم من خاطئ . ويرمز لاحتمال الوقوع في خطأ من هذا النوع بالرمز β.

اجابة السؤال الرابع (ب) :

الأنحراف المعياري للمجتمعين مجهولين σ_1, σ_2 غير معلومة .

من بيانات العينة $\bar{x}_1 = 2.61, s_1 = 0.12, \bar{x}_2 = 2.38, s_2 = 0.14$ ، $n_1 = 50, n_2 = 40, \alpha = 0.05$.

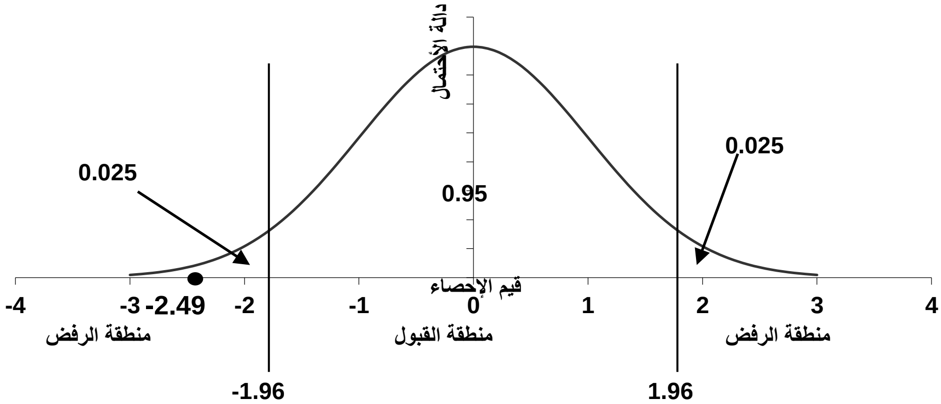
ولذلك باستخدام توزيع **t** في الاختبار نجد أن :

الفرض العدم : $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0.2$ الفرق بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين يساوي **0.2** .

الفرض البديل : $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$ الفرق بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين لا يساوي **0.2** .

الإحصائية المستخدمة $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ و التوزيع المستخدم هو التوزيع الطبيعي القياسي .

بمعلومية مستوي المعنوية و الفرض البديل H_1 فإن الاختبار ذو طرفين وتكون مناطق القبول و الرفض كما هو موضح بالشكل :



الاختبار الإحصائي : بافتراض صحة الافتراض العدم فإن

$$\hat{Z} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0.2}{\sqrt{\frac{s_1{}^2}{n_1} + \frac{s_2{}^2}{n_2}}} = \frac{2.61 - 2.38 - 0.2}{\sqrt{\frac{0.12}{50} + \frac{0.14}{40}}} = \frac{0.03}{0.08} = 0.375$$

القرار : حيث أن $\hat{Z}$ تقع في منطقة الرفض العدم فأننا نستطيع القول أن هناك فرق معنوي بين متوسط كمية النيوكوتين في النوعين يساوي **0.2.**