الفرقة الرابعة عام - شعبة رياضيات

تخلف من الثالثة

الفصل الدراسي الأول

2015م-2016م

تاريخ الامتحان: 2015/12/26

نموذج اجابة نصف ورقة

المادة: ديناميكا الجسم المتماسك

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

جامعة بنهـــــــــــا
كلية التربيـــــــــــة
قســم الرياضيـــــات

دور يناير 2016 م
نظام جديد

المـــادة: ديناميكا الجسم المتماسك
الزمـــن: ساعة
الفرقة: الرابعة تخلف من الثالثة رياضيات
التاريخ: 26/ 12/ 2015 م

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السؤال الأول :

جسيم كتلته m يتحرك علي السطح الداخلي لنصف قشرة كروية ملساء نصف قطرها a. فاذا كان أكبر وأقل عمق $\frac{1}{4}a,\ \frac{1}{2}a$. اثبت أن الضغط الواقع علي الجسيم من السطح الكروي هو $\frac{3}{2}mg(1+\frac{2z}{a})$ حيث z هو عمق الجسيم من المركز.

السؤال الثاني :

تتكون نحله من قرص دائري كتلته $4m$ ونصف قطره a ومن قضيب رفيع عمودياً على مستوى القرص عند مركزه كتلته m وطوله $3a$. إذا بدأت النحله الحركة بحيث كان القضيب رأسياً والقرص لأعلى وكانت سرعة لف النحله حول محورها هو $9\sqrt{5g/a}$. إثبت أن محور النحله سوف يهبط حتى يصنع زاويه 60° مع الرأسي (زاوية الهبوط).

السؤال الثالث:

تتحرك صفيحة خفيفة مستطيلة الشكل $ABCD$ طولها يساوي $\sqrt{2}$ عرضها حول نقطة o في منتصف حافتها الطولية AD حركة دورانية بحته . إذا بدأت حركتها بسرعة زاوية r حول محور يقع في المستوى العمودي على مستوى الصفيحة ويصنع زاوية 30° مع مستوى الصفيحة . أثبت أن مركبة متجه السرعة الزاوية للصفيحة في اتجاه AD هي $(\sqrt{3}\dot{r}/2)\tanh(rt/2)$ وأوجد المركبتين الأخرتين.

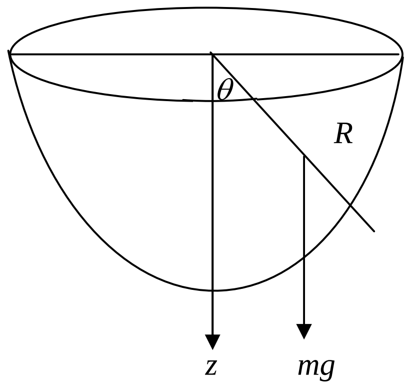
السؤال الرابع:

استنتج متجه كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك حول إحدى نقاطه الثابتة.

انتهت الأسئلـــة،
متمنياً للجميع التوفيـــق والنجـــاح،
د. أحمد مصطفي

نموذج الاجابة

السؤال الاول



معادلات الحركة للجسيم هي

$$m[a(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta)] = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m[a(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)] = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}[a^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi}] = 0 \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (3) نحصل علي

$$a^2 \sin^2\theta\,\dot{\phi} = A \qquad (4)$$

وباستخدام المعادلة (4) في المعادلة (2) وبالتكامل نحصل علي

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2}{a^3\sin^2\theta} = g\cos\theta + B \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية للمسألة

$$\cos\theta = \frac{1}{4}, \qquad \dot{\theta} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}\frac{A^2}{a^3} = \frac{g}{2} + B$$

$$\frac{8}{15}\frac{A^2}{a^3} = \frac{g}{4} + B$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل علي

$$A = \sqrt{\frac{15}{8}ga^3}\ , \qquad B = \frac{3}{4}g$$

وبالتعويض عن قيم A, B في المعادلة (5) نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{g}{2}[3 + 4\cos\theta - \frac{15}{4\sin^2\theta}]$$

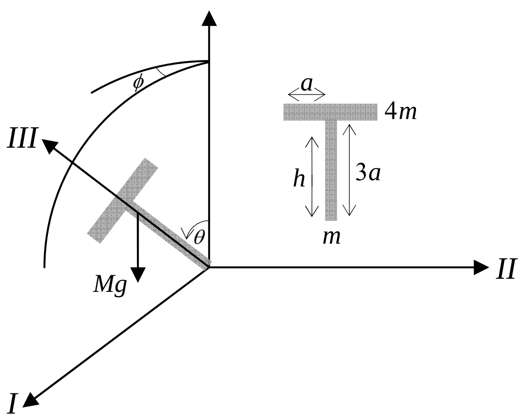
$$\therefore aR = mg\cos\theta + m[ag(\frac{3}{2} + 2\cos\theta - \frac{15}{8\sin^2\theta}) + \frac{15ga}{8\sin^2\theta}]$$

$$= mga\cos\theta + mga(2\cos\theta + \frac{3}{2})$$

$$= 3mgz + \frac{3}{2}mga$$

$$\therefore R = \frac{3}{2}mg(1 + \frac{2z}{a})$$

السؤال الثاني:



نفرض أن M كتلة النحله ، h بعد مركو كتلة النحله عن سنها 0

$$M = 5m \qquad , \qquad h = \left(\frac{27}{10}\right)a$$

$$I = 40ma^2 \quad , \quad I^* = 2ma^2 \tag{1}$$

زوايا الصعود والهبوط للنحله :

هي الجذور الحقيقيه للمعادلة

$$(H - SI^* \cos\theta)^2 + I(2mgh\cos\theta - K)(1-\cos^2\theta) = 0 \tag{I}$$

لتعيين ثوابت الحركة S, H, K نستخدم الشروط الابتدائية للحركة0النحله بدأت الحركة عند $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة (5)، (6) نجد أن

$$H = SI^* \quad , \quad S = 9\sqrt{5g/a} \quad , \quad I^* = 2ma^2 \tag{2}$$

$$H = 18ma\sqrt{5ga} \tag{3}$$

$$K = 2Mgh = 27mga \tag{4}$$

بالتعويض من 1,2,3,4 في I نجد أن

$$(1-\cos^2\theta)(1-2\cos\theta) = 0$$

جذور المعادلة هي

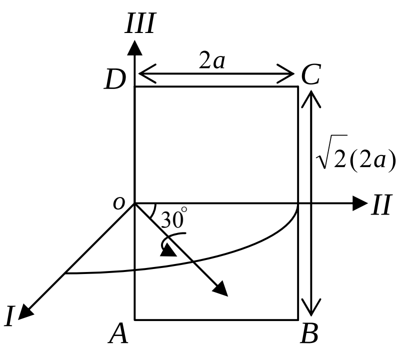
$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

وهي زاوية تمايل محور النحله على الرأسي عند بداية الحركة (زاوية الصعود)0 جذر آخر للمعادلة هو

$$2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

وهي زاوية هبوط النحله على الرأسي .

السؤال الثالث:



بأخذ نقطة الدوران الثابتة o نقطة أصل 0 مجموعة المحاور هي المحوران II, III يقعان في مستوى الصفيحة كما هو مبين بالشكل ، المحور I عمودي على مستوى الصفيحة 0 هذه المحاور هي مجموعة محاور قصور ذاتي رئيسية للقصور عند o 0 هذه المجموعة مثبته في الجسم 0

نفرض أن كتلة الصفيحة m وعرضها $2a$ وطولها $2\sqrt{2}a$ بذلك يكون

$$I_1 = 2ma^2 \quad , \quad I_2 = \frac{1}{3}(2ma^2) \quad , \quad I_3 = \frac{4}{3}(ma^2)$$

بفرض أن $\underline{\omega} = (\omega_1 \,, \omega_2 \,, \omega_3)$ هو متجه السرعة الزاوية للصفيحة 0

<u>معادلات أويلر للحركة (الجسم خفيف)</u>

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

بالتعويض عن قيم I_1, I_2, I_3 نحصل على

$$3\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 = 0 \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 = 0 \tag{3}$$

من (3) في (1) نجد أن

$$3\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

بإجراء التكامل على المعادلة الأخيرة واستخدام الشروط الابتدائية وهي عند $t = 0$ كانت $\underline{\omega} = \underline{r}$ حيث $\underline{r} = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right)$ نحصل على

$$3\omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} \tag{4}$$

وكذلك من (3),(2) وإجراء التكامل واستخدام الشروط الابتدائية نجد ان

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} \tag{5}$$

من (5),(4),(3) نحصل على

$$\dot{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2\right)$$

$$\int_0^{\omega_3} \frac{d\omega_3}{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\int_0^t dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\,r}\tanh^{-1}\frac{2\omega_3}{\sqrt{3}\,r} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,t$$

ومنها

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\tanh\left(\frac{rt}{2}\right) \qquad (6)$$

من (4),(6) نحصل على

$$\omega_1 = \frac{r}{2}\sec h\left(\frac{rt}{2}\right) \qquad (7)$$

من (5),(6)

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\sec h\left(\frac{rt}{2}\right) \qquad (8)$$

السؤال الرابع:

من تعريف متجة السرعة الزاوية للجسم نجد أن

$$\underline{H}_0 = \sum_i r_i \wedge m\,\dot{\underline{r}}_i$$

ولكن $\dot{\underline{r}}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{r}_i$

$$\Rightarrow \underline{H}_0 = \sum_i r_i \wedge m_i(\underline{\omega} \wedge \underline{r}_i)$$

$$= \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i\,(r_i.\underline{\omega})\underline{r}_i \qquad (1)$$

وحيث أن

$$\underline{H}_0 = (H_x, H_y, H_z),$$
$$\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i),$$
$$\underline{\omega}_i = (\omega_x, \omega_y, \omega_z),$$

وبالتعويض في (1) نجد أن

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -Iy_x & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

واذا كانت مجموعة المحاور OXYZ هي محاور رئيسية للجسم فان المعادلة السابقة تؤول الي المعادلة الاتية

$$\underline{H}_0 = I_x \omega_x \underline{i} + I_y \omega_y \underline{j} + I_z \omega_z \underline{k}$$

Dr. Ahmed Mostafa