كلية التربية
قسم الرياضيات

نموذج إجابة
تحليل حقيقي

الفرقة الثالثة عام
شعبة الرياضيات
٢٠١٥ / ٢٠١٦

إجابة السؤال الأول

1) أ) "لأي مجموعة جزئية E من $\mathbb{R}$ ليست خالية ومحدودة من أعلى يوجد عدد حقيقي U بحيث إن $U = \sup E$" خاصية الكمال لـ $\mathbb{R}$. حيث إن $E = \{x \in Q, 0 \le x < \sqrt{3}\}$ فإن $\sup E = \sqrt{3}$ وعليه فإن خاصية الكمال ليست متحققة على Q حيث إنه يوجد $E \subset Q$ اصغر حد أعلى لا ينتمي لـ Q لأن $\sqrt{3} \notin Q$.

ب) خاصية المقارنة: "نفرض إن $E \subset \mathbb{R} \ne \phi$ بحيث إن $\sup E \in \mathbb{R}$. فإذا كانت $\phi \ne F \subset \mathbb{R}$ بحيث إن $F \le E$ بمعنى إن $y \le x$ لكل $y \in F$ ولكل $x \in E$ فإن F محدودة من أعلى وإن: $\sup F \le \sup E$".

البرهان: نفرض إن $U \in \mathbb{R}$ بحيث إن $\sup E = U$ وعليه فإن $x \le U$ لكل $x \in E$. وبما أن $x \ge y$ لكل $x \in E$ ولكل $y \in F$ فإن $y \le U$ لكل $y \in F$ وهذا يعني إن U حد أعلى لـ F ومن خاصية الكمال $\sup F \in \mathbb{R}$ ومن تعريف اصغر حد أعلى فإن يوجد $\sup F \le \sup E$.

إجابة السؤال الثاني

أ) البرهان: بما إن (a_n) تقاربية فإنه يوجد عدد حقيقي a بحيث إن $\lim a_n = a$ وهذا يكافئ:
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N$
وبفرض أن $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ فإنه يوجد N بحيث إن $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ لكل $N < n$
ومنه فإن $||a_n| - |a|| < \frac{1}{2}|a|$ أي إن $|a_n| < \frac{3}{2}|a|$ لكل $N < n$ نعرف $A = \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, \frac{3}{2}|a|\}$ وهي منتهية

(2) أي k نفرضه الأكبر عنصرها وهو أعلى حد أصغر

ولذلك لا $k=\sup A$ فإن $\frac{3}{2}|a| \le k$ وكذلك $|a_n| < k$ لكل $n \ge N$ وأيضاً

$|a_n| < k$ لكل $N < n$ وهذا يعني أن (a_n) متتالية محدودة.

(ب) البرهان "نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية وعليه فإنه تحقق

شرط كوشي وبالتالي فإن: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} : \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon, \forall n \ge m > N.$

فإذا فرضنا أن $m = n$ نجد أن: $|a_n| = \left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

ومن ذلك فإن $\lim a_n = 0$.

إجابة السؤال الثالث

(أ) شرط عدم الاتصال: "$f: D \to \mathbb{R}$ لا تكون متصلة عند $c \in D$ إذا وإذا فقط وجدت (x_n) من D بحيث أن $\lim x_n = c$ ولكن $f(c) \neq \lim f(x_n)$".

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

لإثبات أن هذه الدالة ليست متصلة عند $x = 0$ يكفي أن نجد متتالية واحدة (x_n) تؤول إلى 0 ولكن $(f(x_n))$ لا تؤول إلى $f(0) = 0$. نفرض أن $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ وبالتالي $\lim x_n = \lim \frac{1}{2n\pi} = 0$

ولكن $f(x_n) = \frac{1}{x_n}\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 2n\pi\cos(2n\pi) = 2n\pi$

حيث أن $\cos(2n\pi) = 1$ أي أن $\lim f(x_n) = \lim 2n\pi = \infty$.

(ب) شرط عدم الاتصال المنتظم: "الدالة f لا تكون متصلة اتصالاً منتظماً إذا وإذا فقط يوجد $\varepsilon_0 > 0$ ويوجد متتاليتان (x_n)، (y_n) من ... f بحيث أن:

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0 \wedge |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$ لكل n

(3)

الآن نبحث عن متتاليتين تحققان شرط عدم الاتصال المنتظم على المجال $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \le \frac{\pi}{2}\}$. فإذا فرضنا أن $x_n = (4/n\pi)$، $y_n = (4/(n+1)\pi)$ فإن $|x_n - y_n| = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n}$

وكذلك $|f(x_n) - f(y_n)| = |\tan(n\frac{\pi}{4}) - \tan(n+1)\frac{\pi}{4}| > \epsilon_0$

حيث إن $\epsilon_0 > 0$ لأن $\tan(\frac{\pi}{2}) = \infty$ أي أن الدالة $f(x) = \tan(\frac{1}{x})$

ليست متصلة اتصالاً منتظماً.

إجابة السؤال الرابع

(أ) نلاحظ أن $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ لأي عدد حقيقي x نقارنها

بالمتسلسلة التباعدية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ بإيجاد

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \left(\frac{1}{n+x^2}\right) / \left(\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{n}{n+x^2} = 1 > 0$$

وعليه فإن $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right|$ ليست تقاربية أي أن $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ ليست

متقاربة تقارباً مطلقاً. وباستخدام اختبار ليبنتز هذه

المتسلسلة متقاربة لكل x في $\mathbb{R}$ لأن $\left(\frac{1}{n+x^2}\right)$ لا متزايدة وأيضاً

$\lim \frac{1}{n+x^2} = 0$ وعليه فإذا فرضنا مجموعها $S(x)$ وأن $S_n(x)$ المجموع

الجزئي النوني فإن

$$|S(x) - S_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2+n+1}$$

وحيث إن

$$\frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}$$ لجميع قيم x في $\mathbb{R}$ فإن

وبالتالي فإن:

$$\sup\{|S(x) - S_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} \le \frac{1}{n+1}$$

$$0 < \lim ||S(x) - S_n(x)|| \le \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

(4)

أي إن $\|S(x)-S_n(x)\|=0$ سنا وعليه فإن $(S_n(x))$ تتقارب من $S(x)$ تقاربا منتظما و منه $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ تتقارب تقاربا منتظما على $\mathbb{R}$

(ب) إختبار إبل "المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ متقاربة تقاربا منتظما على $D\subset\mathbb{R}$ و f_n كانت (g_n) متتالية مطردة ومحدودة من الدوال على D فإن $\sum_{n=0}^{\infty} g_n f_n$ متقاربة تقاربا منتظما على D

والآن نفرض $f_n=\frac{(-1)^n}{n}$ وباستخدام إختبار ليبنتز نجد إن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة تقاربا منتظما لأن $\frac{1}{n}>0$ ، $(\frac{1}{n})$ مطردة لا متزايدة و كذلك $\lim\frac{1}{n}=0$ على $D=]0,1[$. وأيضاً نلاحظ إن $g_n(x)=e^{-nx}$ مطردة لا متزايدة ومحدودة وعليه باستخدام اختبار إبل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ تتقارب تقاربا منتظما

(ج) نفرض إن $P=P_Q\cup P_{Q^c}$ هي التجزئة المنتظمة للفترة $[0,1]$ إن $x_k=x_0+k\frac{b-a}{n}$ ، $k=1,2,\dots,n$ أي إن $x_k=\frac{k}{n}$ وبالتالي فإن $f(t_k)=\begin{cases}1, & t_k=x_k\\ 0, & t_k=x_k'\end{cases}$ ، $\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})=x_k^2-x_{k-1}^2=\frac{2k-1}{n^2}$

وبالتالي فإن

$$S(P,f,g)=\sum_{P} f(t_k)\Delta g_k$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1), & t_k\in[0,1]\cap Q\\ 0, & t_k\in[0,1]\cap Q^c\end{cases}=\begin{cases}\frac{n(n+1)}{n^2}-\frac{1}{n}\\ 0\end{cases}=\begin{cases}1\\ 0\end{cases}$$

وهذا تناقض حقيقة النزاع وعليه فإن الدالة f غير قابلة للتكامل بالنسبة للدالة g #