جامعة بنها
كلية التربية
قسم الرياضيات

الفرقة : الثالثة أساسي رياضيات
المادة : نظرية الاحتمالات 315M
الزمن : ساعتان

امتحان الفصل الدراسي الأول لعام 2015 / 2016 م

اجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

(أ) اثبت أن $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

(ب) إذا كانت $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

اوجد الاحتمالات الشرطية الآتية : $P(A \cap B)$, $P(\overline{A}|B)$, $P(A|\overline{B})$, $P(A|B)$

السؤال الثاني :

(أ) عرف الاحتمال الشرطي – الحادثتان المستقلتان – الحادثتان المتنافيتان .

(ب) متغير عشوائي X **له دالة الكثافة الاحتمالية :** $f(x) = e^{-x}$, $x \succ 0$

احسب $E(X)$ **ثم اوجد الاحتمالات التالية :** $P[1 \le X \le 2]$ **و** $P[X \le 5]$.

السؤال الثالث :

(أ) اذكر مسلمات الاحتمال ثم عرف المتغير العشوائي المتقطع و المتصل .

(ب) متغير عشوائي X **له التوزيع الاحتمالي :**

X	-10	40	50
P	0.3	0.4	0.3

اوجد التوقع الرياضي والتباين لذلك المتغير .

السؤال الرابع :

إذا ألقيت قطعة عملة سبع مرات متتالية فأوجد احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل

(أ) اوجد التوقع الرياضي و التباين إذا كان :

X **متغير عشوائي يحقق :** $E(X + 4) = 10$, $E[(X + 4)^2] = 116$

انتهت الأسئلة
مع أطيب التمنيات بالتوفيق

الإجابـــة النموذجيـــة

إجابة السؤال الأول :

(أ)

$\because \ (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \phi$

$\therefore \ P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P[A \cap \overline{B}] + P[\overline{A} \cap B]$

$\because \ A = (A \cap \overline{B})] \cup (A \cap B)$

$\because \ B = (\overline{A} \cap B)] \cup (A \cap B)$

$\therefore \ P(A) = P[(A \cap \overline{B})] + P[(A \cap B)]$

$\therefore \ P(B) = P[(\overline{A} \cap B)] + P[(A \cap B)]$

$\therefore \ P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P[A \cap \overline{B}] + P[\overline{A} \cap B]$

$= P[A] + P[B] - 2\,P[A \cap B]$

(ب)

$\therefore \ P[(A \cup B) = \frac{3}{4}, \quad P(A) = \frac{1}{3}, \ P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \frac{3}{4} = (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}) - P[A \cap B]$

$\therefore \ P[A \cap B] = \frac{1}{12}$

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P[\overline{A} \cap B]}{P[A]} = \frac{P[B] - P[A \cap B]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P[A \cap \overline{B}]}{P[\overline{B}]} = \frac{P[A] - P[A \cap B]}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) الاحتمال الشرطى للحادثتان A,B هو

$$P(A|B) = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

بينما الحادثتان A,B مستقلتان إذا كان

$P(A \cap B) = P[A]\ P[B]$

و متنافيتان إذا كان

$A \cap B = \phi$

(ب) التوقع الرياضى

$$E(X\ ) = \int_0^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

$$= \int_0^{\infty} x\ e^{-x}\ dx = -x\ e^{-x} + \int_0^{\infty} e^{-x}\ dx$$

$$= [\ -e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

$$P(1 \le X \le 2\ ) = \int_1^2 f(x)\ dx = \int e^{-x}\ dx$$

$$= [\ -e^{-x}\ ]_1^2 = e^{-1} - e^{-2}$$

$$P(X \le 5\ ) = \int_0^5 f(x)\ dx = \int e^{-x}\ dx$$

$$= [\ -e^{-x}\ ]_0^5 = 1 - e^{-5}$$

إجابة السؤال الثالث :

(أ) المتغير العشوائي المتصل هو متغير رياضى يأخذ قيما تعتمد على الصدفة داخل فترة سواء كانت فترة محدودة او لانهائية
بينما المتغير العشوائي المتقطع يأخذ قيما معدودة
مسلمات الاحتمال هي :

$O1:\quad P(\ A\ ) \ge 0$

$O2\quad P(\ S\ ) = 1$

$O3\quad If\quad A \cap B = \phi\ then\ P(A \cup B) = P(\ A\ ) + P(\ B\ )$

(ب)

$$E(X + 4\ ) = 10$$

$$\therefore \int (\ X + 4\ )\ f(x)dx = 10$$

$$\int X\ f(x)\ dx + 4 \int f(x)\ dx = 10$$

$$E(\ X\ ) + 4 = 10$$

$$\therefore E(\ X\ ) = 6$$

$$E[(X + 4)^2\ ] = 116$$

$$\therefore \int (\ X + 4\ )^2\ f(x)dx = 116$$

$$\int X^2\ f(x)\ dx + 8 \int x\ f(x)\ dx + 16 \int f(x)\ dx = 116$$

$$E(\ X^2\ ) + 8\ E(\ X\ ) + 16 = 116$$

$$\therefore E(\ X^2\ ) = 52$$

$$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 52 - 36$$
$$= 16$$

(ب) تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع

$$\therefore \quad E(X) = \sum x_k P_k$$
$$= -10(0.3) + 40(0.4) + 50(0.3)$$
$$= 28$$

$$\therefore \quad E(X^2) = \sum x_k^2 P_k$$
$$= 100(0.3) + 1600(0.4) + 2500(0.3)$$
$$= 1420$$

$$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= 1420 - 784$$
$$= 636$$

إجابة السؤال الرابع :

(أ) نفرض ان ظهور صورة واحدة على الاقل هو الحادثة A اذن عدم ظهور صورة هو مكملة الحادثة $\bar{A}$

$$\because \quad |S| = 2^7 = 128 \quad \therefore P[\bar{A}] = \frac{1}{128}$$
$$\therefore \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{127}{128}$$

(ب) من تعريف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتصل

$$E(X + 4) = 10$$
$$\therefore \int (X + 4) f(x)\,dx = 10$$
$$\int X f(x)\,dx + 4\int f(x)\,dx = 10$$
$$E(X) + 4 = 10$$
$$\therefore E(X) = 6$$

$$E[(X + 4)^2] = 116$$
$$\therefore \int (X + 4)^2 f(x)\,dx = 116$$
$$\int X^2 f(x)\,dx + 8\int x f(x)\,dx + 16\int f(x)\,dx = 116$$
$$E(X^2) + 8E(X) + 16 = 116$$
$$\therefore E(X^2) = 52$$

$\therefore \quad V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 52 - 36$

$= 16$