جامعة بنها
كلية االعلوم
قسم الرياضيات

الـزمـن: ساعتان
التـــرم : الأول
التـاريخ : ٢٠١٦/١/٩

معادلات تفاضلية ــ لطلاب الفرقة الثالثة
تربية أساسى (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: الثالثة ـ تربية أساسى
شعبة: الرياضيات

يوم الامتحان: السبت ٩ / ١ / ٢٠١٦م

المادة : معادلات تفاضلية

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنها
كلية االعلوم
قسم الرياضيات

الـزمـن: ساعتان
التـــرم : الأول
التـاريخ : ٢٠١٦/١/٩

معادلات تفاضلية ــ لطلاب الفرقة الثالثة
تربية أساسى (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

أوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية:-

1) $(xy + y + y^4)\,dx + (x + 4y^3)\,dy = 0.$

2) $y' = \cot(x + y) - 1.$

3) $y = 2xy' - yy'^2.$

4) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0.$

5) $y'' + y = \tan x.$

6) $y''' - 8y = xe^{2x}.$

مـع أطـيب التـمنيـات بالنجـاح،،،

معادلات تفاضلية ــ لطلاب الفرقة الثالثة
تربية أساسى (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

1) $$(xy+y+y^4)\,dx+(x+4y^3)\,dy=0$$

$$M_y=x+1+4y^3,\qquad N_x=1$$

$$\therefore\ M_y\neq N_x$$

∴ هذه المعادلة غيرتامة

$$M_y-N_x=x+4y^3=N$$

$$\rho_y=0\ \Rightarrow\ 1=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\ \Rightarrow\ \rho=e^x$$

$$M=e^x(xy+y+y^4),\quad N=e^x(x+4y^3)$$

$$M_y=e^x(x+1+4y^3),\quad N_x=e^x(x+1+4y^3)$$

$$\int_x M\,dx=\int_x e^x(xy+y+y^4)\,dx=e^x(xy+y^4)$$

$$\int_y N\,dy=\int_y e^x(x+4y^3)\,dy=e^x(xy+y^4)$$

وبالمقارنة يتضح أن الحل العام هو

$$e^x(xy+y^4)=C$$

2) $$y'=\cot(x+y)-1$$

نستعمل التعويض $u=x+y$ وبالتالى فان $u'=1+y'$ وتصبح المعادلة

$$u'=\cot u=\frac{\cos u}{\sin u}\ \Rightarrow\ \frac{\sin u}{\cos u}du=dx$$

$$-\ln\cos u=x-\ln C$$

$$\cos(x+y)=Ce^{-x}$$

3) $y = 2xy' - yy'^2$

هذه المعادلة ليست على صورة معادلة كليريو ويمكن حلها بالنسبة لـ x

$$y(1+y'^2) = 2xy'$$

$$2x = \frac{y}{y'} + yy' = \frac{y}{p} + yp$$

$$2\frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{1}{p} + p + (\frac{-y}{p^2} + y)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = -\frac{1}{p} + p + y(\frac{-1}{p^2} + 1)\frac{dp}{dy}$$

$$0 = (\frac{-1}{p^2} + 1)(p + y\frac{dp}{dy})$$

الحل الشاذ $p^2 = 1 \Rightarrow p = \pm 1 \quad \therefore y = \pm x$

الحل العام

$$p + y\frac{dp}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \quad p = \frac{C}{y}$$

$$2x = \frac{y^2}{C} + C \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx - C^2 = 2C(x - \frac{C}{2})$$

4) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

معادلة كوشى وأويلر . نضع $y = e^{mx}$ لنصل للمعادلة المساعدة

$$m(m-1) + 5m + 4 = m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0 \qquad m_1 = -2 = m_2$$

$$y_1 = x^{-2} \quad , \quad y_2 = x^{-2}\ln x$$

$$y = x^{-2}(C_1 + C_2 \ln x)$$

معادلات تفاضلية ــ لطلاب الفرقة الثالثة
تربية أساسى (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

5) $y'' + y = \tan x$

المعادلة خطية غير متجانسة وبمعاملات ثابتة و المعادلة المساعدة هى

$$m^2 + 1 = (m-i)(m+i) = 0$$

$$m_1 = i \;, m_2 = -i \quad , \qquad y_1 = \cos x \;, \quad y_2 = \sin x$$

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

والان نفرض ان الحل العام على الصورة التالية

$$y = v_1 \cos x + v_2 \sin x$$

ويكون لدينا الشرطان التاليان

$$v'_1 \cos x + v'_2 \sin x = 0$$

$$-v'_1 \sin x + v'_2 \cos x = \tan x$$

بضرب المعادلة الاولى فى $\sin x$ والثانية فى $\cos x$ ثم الجمع نجد

$$v'_2 = \sin x \qquad , \qquad v_2 = -\cos x + C_2$$

$$v'_1 = -v'_2 \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{1}{\cos x} + \cos x$$

$$v_1 = \int (-\sec x + \cos x)dx = -\ln(\sec x + \tan x) + \sin x + C_1$$

$$y = [-\ln(\sec x + \tan x) + \sin x + C_1] \cos x + \qquad [-\cos x + C_2] \sin x +$$

$$= -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

6) $y''' - 8y = xe^{2x}$

يمكننا اولا من التخلص من الدالة e^{2x} فى الحد المطلق بالتعويض

$$y = ue^{2x}, y' = (u' + 2u)e^{2x}$$

$$y'' = (u'' + 4u' + 4u)e^{2x}$$

$$y''' = (u''' + 6u'' + 12u' + 8u)e^{2x}$$

$$\therefore \quad u''' + 6\,u'' + 12u = x$$

والمعادلة المساعدة تكون الان

$$m(m^2+6m+12)=\left[m(m+3)^2+3\right]$$

$$=m(m+3-i\sqrt{3})(m+3+i\sqrt{3})=0\ ,$$

$$m_1=0,\quad m_2=-3+i\sqrt{3},\quad m_3=-3-i\sqrt{3}$$

$$u_1=1,\quad u_2=e^{-3x}\cos(\sqrt{3}x),$$

$$u_3=e^{-3x}\sin(\sqrt{3}x),\quad u_p=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$

$$u_p'=2Ax+B,\ u_p''=2A,\ u_p'''=0$$

$$12A+24Ax+12B=x,24A=1,A+B=0$$

$$u_p=\frac{x^2}{24}-\frac{x}{24}=\frac{x(x-1)}{24}$$

$$y=\begin{bmatrix}\dfrac{x(x-1)}{24}+C_1+C_2e^{-3x}\cos(\sqrt{3}x)+\\ C_3e^{-3x}\sin(\sqrt{3}x)\end{bmatrix}e^{2x}$$

$$=\frac{x(x-1)}{24}e^{2x}+C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos(\sqrt{3}x)+C_3\sin(\sqrt{3}x))$$