جامعة بنـها – كلية التربيه

الفرقه الثالثه - شعبه الفيزياء

يوم الامتحان: السبت 23 / 1 / 2016 م

المادة : رياضيات (5) معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاص

الممتحن: د . / عصام محسن عبدالحميد عواد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج الأسئله + نموذج إجابه

ورقة كامله

رياضيات (5) معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاص – كليه التربيه –الفرقه الثالثه - فيزياء

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول :

أ- أثبت أن

$$2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})=1.3.5...(2n-1)\sqrt{\pi}$$

ب- أثبت أن

$$\int_0^1\sqrt{\log(\frac{1}{x})}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

السؤال الثانى : أثبت أن

$$1-\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$2-\int_{-1}^{-1}xP_{n-1}(x)P_n(x)\,dx=\frac{2n}{4n^2-1}$$

مستخدما العلاقه

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

السؤال الثالث :

1- باستخدام تحويل لابلاس أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية مع الشروط المذكورة

$$Y''-3Y'+2Y=4e^{2t},\qquad Y(0)=-3,\quad Y'(0)=5$$

2 - كون المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة للدالة (حيث a,b ثوابت):

$$z=a\,x^2+b\,y^2+a\,b$$

السؤال الرابع :

1- أوجد الحل العام للمعادلة

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z.$$

2- أوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0\qquad 0<x<\ell\qquad t>0$$

التى تحقق الشروط

$$u(0,t)=0,\qquad u(\ell,t)=0,\qquad u_t(x,0)=0$$

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق والنجاح

د/ عصام محسن

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات (5) معادلات تفاضليه جزئيه ودوال خاص – كليه التربيه –الفرقه الثالثه - فيزياء

اجابة السؤال الأول

ا-

$$\because \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

بوضع $x = n - \frac{1}{2}$ نحصل على

$$\therefore \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})\Gamma(n-\tfrac{1}{2})$$

$$= (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\Gamma(n-\tfrac{3}{2})$$

$$= (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})(n-\tfrac{5}{2})\cdots\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$\therefore 2^n\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = 1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}$$

ب- نفرض أن

$$y = \ln\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad e^y = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad x = e^{-y} \quad \rightarrow \quad dx = -e^{-y}\,dy$$

$$\int_0^1 \sqrt{\log(\tfrac{1}{x})}\,dx = \int_\infty^0 -\sqrt{y}\,e^{-y}\,dy = \int_0^\infty \sqrt{y}\,e^{-y}\,dy$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

إجابة السؤال الثانى

$$1- \int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^{1/2}\theta\,\cos^{-1/2}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2 - من العلاقة التكرارية

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

إذا ضربنا هذه العلاقـــة في P_{n+1} وتم التكامل بالنســبة للمتغير x من 1 إلى -1 فإننا نحصل على

$$(n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx-(2n+1)\int_{-1}^{-1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

$$+n\int_{-1}^{1} P^2_{n-1}(x)\,dx\;=0$$

التكامل الأول يساوي الصفر وذلك من شرط التعامد لكثيرات حدود لاجندر

$$\therefore \int_{-1}^{-1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx=\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1} P^2_{n-1}(x)\,dx$$

$$=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2}{2(n-1)+1}=\frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{2n}{4n^2-1}.$$

إجابة السؤال الثالث

بفرض أن $L\{Y\}=y(s)$ بأخذ تحويل لابلاس لكل من الطرفين نجد أن

$$L^{-1}\{Y''\}-3L^{-1}\{Y'\}+2L^{-1}\{Y\}=4L^{-1}\left\{e^{2t}\right\}$$

$$\therefore\;\; s^2y-sY(0)-Y'(0)-3[sy-Y(0)]+2y=\frac{4}{s-2}$$

بالتعويض عن الشروط الابتدائية نجد أن

$$(s^2-3s+2)y+3s-14=\frac{4}{s-2}$$

$$\therefore y=\frac{4}{(s-2)(s^2-3s+2)}+\frac{14-3s}{(s^2-3s+2)}$$

$$\therefore y=\frac{-3s^2+20s-24}{(s-2)^2(s-1)}=\frac{-7}{s-1}+\frac{4}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي لكل من الطرفين نجد أن:

$$Y(t)=-7e^{t}+4e^{2t}+4te^{2t}.$$

ب- بتفاضل ($z=a\,x^2+b\,y^2+a\,b$) بالنسبة إلي x, y عي التوالي نحصل علي:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2a\ x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2b\ y$$

بالتعويض نحصل علي:

$$z = \frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big/ xy \qquad \Rightarrow \qquad 4xyz = 2x^2yp + 2xy^2q + pq$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى.

إجابة السؤال الرابع

1- المعادلات المساعدة هي:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{3z}$$

يكـــون لــــدينا $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{3z}$ وبالتكامـــل نجـــد أن $u = \frac{z}{x^3} = \text{constant} = a$. وكـــذلك $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ وبالتكامـــل نجـــد أن $v = \frac{y}{x} = \text{constant} = b$. وبحذف الثوابت a,b نحصل علي الح ل العام $\varphi(u,v) = 0 \Leftarrow \varphi(\frac{z}{x^3}, \frac{y}{x}) = 0$.

والحل الكامل هو $\frac{z}{x^3} = \alpha\frac{y}{x} + \beta$ ، حيث α, β ثوابت اختيارية.

2- باستخدام طريقة فصل المتغيرات

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \neq 0$$

$$\therefore XT'' = c^2 X'' T \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\alpha^2$$

$$X'' + \alpha^2 X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(\ell) = 0$$

$$X(x) = A\ \cos\alpha\, x + B\ \sin\alpha\, x$$

من الشروط الابتدائيه نحصل على

$$B\ \sin\alpha\,\ell = 0, \qquad B \neq 0, \quad \sin\alpha\,\ell = 0$$

$$\therefore \quad \alpha\,\ell = n\pi, \qquad \alpha = \frac{n\pi}{\ell}$$

إذن حل المعادله هو

$$X_n = B_n\ \sin n\pi\, x/\ell$$

أيضاً

$$T(t) = C_n\ \cos\frac{n\pi c}{\ell}\,t + D_n\ \sin\frac{n\pi c}{\ell}\,t$$

$$\therefore\ u_n = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n\ \cos\frac{n\pi c}{\ell}\,t + D_n\ \sin\frac{n\pi c}{\ell}\,t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}\,x$$

$$\therefore\ u_t=\left(\frac{-C_n n\pi c}{\ell}\ \sin\frac{n\pi c}{\ell}\ t+D_n\frac{n\pi c}{\ell}\ \cos\frac{n\pi c}{\ell}\ t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}\ x$$

$$u_t(x,0)=\left(D_n\frac{n\pi c}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}\ x=0 \qquad \therefore\ D_n=0$$

$$u_n=A\ \sin\frac{n\pi}{\ell}\ x\cos\ \frac{n\pi}{\ell}\ t$$

انتهت الأجابة

الممتحن

د/ عصام محسن