كلية التربية

الفرقة الثالثة عام - شعبة رياضيات

الفصل الدراسي الأول

2015م-2016م

تاريخ الامتحان: 2016/1/9

نموذج اجابة   نصف ورقة

المادة: ديناميكا الجسم المتماسك (الجاسيء)

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

جامعة بنهـــــــــا
كلية التربيـــــــــة
قســم الرياضيـــات

دور يناير 2016 م

المـــادة: ديناميكا الجسم المتماسك
الزمـــن: ساعة
الفرقة: الثالثة عام رياضيات
التاريخ: 9/ 1/ 2016 م

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السؤال الأول :

أ) عـرف النحلـة ثـم اسـتنتج متجـه الـسرعة الزاوية لنحلـه متماثلـة تـدور حركـة دورانيـة بحتـه حـول سنها.

ب) استنتج متجه كمية الحركة الزاوية لجسم متماسك حول إحدى نقاطه الثابتة.

السؤال الثانى :

تتحـرك صـفيحة خفيفـة مـستطيلة الـشكل $ABCD$ طولهـا يـساوي $\sqrt{2}$ عرضـها حـول نقطـة o فـي منتـصف حافتهـا الطوليـة AD حركـة دورانيـة بحتـه . إذا بـدأت حركتهـا بـسرعة زاويـة Ω حـول محـور يقـع فـي المـستوى العمـودي علـى مـستوى الـصفيحة ويـصنع زاويـة 30° مـع مـستوى الـصفيحة . أثبـت أن مركبـة متجـه الـسرعة الزاويـة للـصفيحة فـي اتجـاه AD هـي $(\sqrt{3}\,\Omega/2)\tanh(\Omega t/2)$ وأوجـد المركبتين الأخرتين.

السؤال الثالث:

أ) عرف الجسم المتماسك وما هي انواع الحركة المختلفة له.

ب) جسيم كتلتـه m يتحـرك علـي الـسطح الـداخلي لنـصف قـشرة كرويـة ملـساء نـصف قطرهـا a. فـاذا كـان أكبـر وأقـل عمـق $\frac{1}{4}a,\ \frac{1}{2}a$. اثبـت أن الـضغط الواقـع علـي الجـسيم مـن الـسطح الكـروي هـو $\frac{3}{2}mg(1+\frac{2z}{a})$ حيث z هو عمق الجسيم من المركز.

انتهت الأسئلـــة،
متمنياً للجميع التوفيـــق والنجــاح،
د. أحمد مصطفي

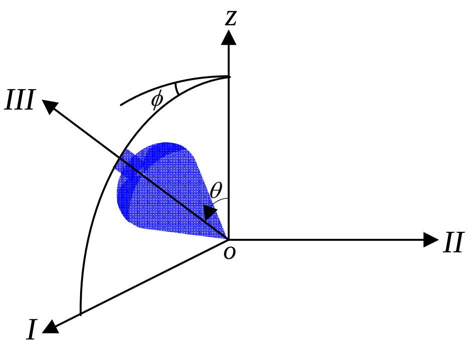
نموذج الاجابة

السؤال الاول

أ) النحله هو جسم دوراني متماثل حول محوره الهندسي . يتحدد اتجاه النحله في الفراغ متى علم اتجاه ثلاثة محاور متعامده مثبته في النحله وتدور معها.

ولايجاد متجه السرعة الزاوية

وسوف نستخدم مجموعة محاور الاسناد الآتية



النقطة o سن النحله نقطة أصل ثابتة في الفراغ 0

المحور III **:** محور التماثل الهندسي للنحله ومتجه الوحدة في اتجاهه $0\,\hat{e}_3$

المحور I **:** عمودي على المحور III ويقع في مستوى الزوال 0 ومتجه الوحدة في اتجاه هذا المحور وفي اتجاه تزايد θ هو $0\,\hat{e}_1$

المحور II **:** هو المحور العمودي على مستوى الزوال (هذا المحور يقع بإستمرار في مستوى أفقي) ومتجه الوحدة في اتجاه هذا المحور وفي اتجاه تزايد ϕ هو $0\,\hat{e}_2$

وهذا المحور هو The line of Nodes 0

مجموعة محاور الاسناد هذه هي مجموعة محاور رئيسيه للفصور للنحله عند سنها o 0 هذه المحاور غير مثبته في الفراغ حيث يتغير اتجاهها بتغير أي من الزاويتين θ أو ϕ 0 هذه المحاور غير مثبته في الجسم المتماسك (النحله) لأن النحله يمكن أن تلف (تدور) حول محور تماثلها الهندسي مع ثبوت كل من الزاويتين ϕ,θ أي أن المحاور لا تغير اتجاهها بدوران الجسم حول محور تماثله الهندسي 0 متجه السرعة الزاوية $\underline{r}$ لمجموعة محاور الاسناد هو

$$\underline{r}=\underline{\theta}+\underline{\phi}=\dot{\theta}\hat{e}_2+\dot{\phi}\underline{k}$$

حيث $\underline{k}$ متجه الوحدة في الاتجاه الرأسي لأعلى

$$\underline{r}=-\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_1+\dot{\theta}\,\hat{e}_2+\dot{\phi}\cos\theta\,\hat{e}_3 \qquad \text{(i)}$$

مجموعة المحاور المثبتة في النحله والتي سيتحدد اتجاه النحله متى حدد اتجاهها هي:

المجموعة $oxyz$ حيث o سن النحلـه (نقطـة الأصل) 0 oz محور تماثل النحلـه (ينطبق علـى المحور III) 0

المحوران ox, oy محوران متعامدان يقعان في المستوى العمودي علـى محور التماثل الهندسي للنحلـه (يقعان فـي نفس مستوى المحورين I, II) 0

الزاويتين ϕ, θ **:** تحددان المحور oz 0

الزاوية ψ **:** تحدد المحورين ox, oy في المستوى الثابت في النحله بالنسبه لاتجاه معلوم في هذا المستوى 0

متجه السرعة الزاوية $\underline{\omega}$ للنحله

$$\underline{\omega} = \underline{\theta} + \underline{\phi} + \underline{\psi} = \underline{r} + \underline{\psi} = \underline{r} + \dot{\psi}\underline{e}_3$$

أي أن

$$\underline{\omega} = -\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{e}_1 + \dot{\theta}\,\hat{e}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{e}_3 \qquad \text{(ii)}$$

ب)

من تعريف متجة السرعة الزاوية للجسم نجد أن

$$\underline{H}_0 = \sum_i r_i \wedge m\dot{\underline{r}}_i$$

ولكن $\dot{\underline{r}}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{r}_i$

$$\Rightarrow \underline{H}_0 = \sum_i r_i \wedge m_i(\underline{\omega} \wedge \underline{r}_i)$$
$$= \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i\,(r_i.\underline{\omega})\underline{r}_i \qquad (1)$$

وحيث أن

$$\underline{H}_0 = (H_x, H_y, H_z),$$
$$\underline{r}_i = (x_i, y_i, z_i),$$
$$\underline{\omega}_i = (\omega_x, \omega_y, \omega_z),$$

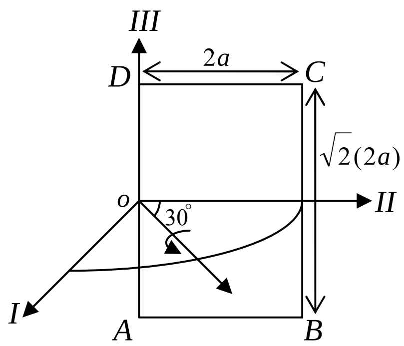
وبالتعويض في (1) نجد أن

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -Iy_x & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

واذا كانت مجموعة المحاور OXYZ هي محاور رئيسية للجسم فان المعادلة السابقة تؤول الي المعادلة الاتية

$$\underline{H}_0 = I_x\omega_x \underline{i} + I_y\omega_y \underline{j} + I_z\omega_z \underline{k}$$

السؤال الثاني:



بأخذ نقطة الدوران الثابتة o نقطة أصل 0 مجموعة المحاور هي المحوران II, III يقعان في مستوى الصفيحة كما هو مبين بالشكل ، المحور I عمودي على مستوى الصفيحة . هذه المحاور هي مجموعة محاور قصور ذاتي رئيسية للفصور عند o . هذه المجموعة مثبته في الجسم .

نفرض أن كتلة الصفيحة m وعرضها $2a$ وطولها $2\sqrt{2}a$ بذلك يكون

$$I_1 = 2ma^2 \quad , \quad I_2 = \frac{1}{3}(2ma^2) \quad , \quad I_3 = \frac{4}{3}(ma^2)$$

بفرض أن $\underline{\omega} = (\omega_1 , \omega_2 , \omega_3)$ هو متجه السرعة الزاوية للصفيحة .

معادلات أويلر للحركة (الجسم خفيف)

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

بالتعويض عن قيم I_1, I_2, I_3 نحصل على

$$3\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 = 0 \qquad (3)$$

من (3) في (1) نجد أن

$$3\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

بـإجراء التكامـل علـى المعادلـة الأخيـرة واسـتخدام الـشروط الابتدائيـة وهـي عنـد $t=0$ كانـت $\underline{\omega}=\underline{r}$ حيـث $\underline{r}=\left(\frac{r}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}r,0\right)$ نحصل على

$$3\omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3r^2}{4}-\omega_3^2} \tag{4}$$

وكذلك من (3),(2) وإجراء التكامل واستخدام الشروط الابتدائية نجد ان

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}-\omega_3^2} \tag{5}$$

من (5),(4),(3) نحصل على

$$\dot{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{3r^2}{4}-\omega_3^2\right)$$

$$\int_0^{\omega_3}\frac{d\omega_3}{\frac{3r^2}{4}-\omega_3^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\int_0^t dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\,r}\tanh^{-1}\frac{2\omega_3}{\sqrt{3}\,r} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,t$$

ومنها

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\tanh\left(\frac{rt}{2}\right) \tag{6}$$

من (6),(4) نحصل على

$$\omega_1 = \frac{r}{2}\sec h\left(\frac{rt}{2}\right) \tag{7}$$

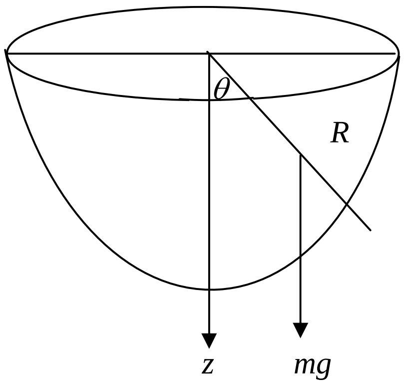
من (6),(5)

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}\, r}{2} \sec h\left(\frac{rt}{2}\right) \qquad (8)$$

السؤال الثالث:

أ) يعرف الجسم المتماسك بأنه تجمع من النقط المادية تظل المسافة بين أي نقطتين ثابتة خلال دراسة حركته مهما كانت القوى المؤثرة عليه

ب)



معادلات الحركة للجسيم هي

$$m[a(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta)] = R - mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$m[a(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)] = -mg\sin\theta \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}[a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}] = 0 \qquad (3)$$

بتكامل المعادلة (3) نحصل علي

$$a^2\sin^2\theta\,\dot{\phi} = A \qquad (4)$$

وباستخدام المعادلة (4) في المعادلة (2) وبالتكامل نحصل علي

$$\frac{1}{2}a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{A^2}{a^3\sin^2\theta} = g\cos\theta + B \qquad (5)$$

ومن الشروط الابتدائية للمسألة

$$\cos\theta = \frac{1}{4}, \qquad \dot{\theta} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \dot{\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{2}{3}\frac{A^2}{a^3} = \frac{g}{2} + B$$

$$\frac{8}{15}\frac{A^2}{a^3} = \frac{g}{4} + B$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل علي $B = \frac{3}{4}g$, $A = \sqrt{\frac{15}{8}ga^3}$

وبالتعويض عن قيم A, B في المعادلة (5) نجد أن

$$a\dot{\theta}^2 = \frac{g}{2}[3 + 4\cos\theta - \frac{15}{4\sin^2\theta}]$$

$$\therefore aR = mg\cos\theta + m[ag(\frac{3}{2} + 2\cos\theta - \frac{15}{8\sin^2\theta}) + \frac{15ga}{8\sin^2\theta}]$$

$$= mga\cos\theta + mga(2\cos\theta + \frac{3}{2})$$

$$= 3mgz + \frac{3}{2}mga$$

$$\therefore R = \frac{3}{2}mg(1 + \frac{2z}{a})$$

Dr. Ahmed Mostafa