جامعة بنها (نموذج اجابة وأسئلة) ثالثة رياضيات تعليم أساسى

كلية التربية المادة : رياضة تطبيقية (3)

قسم الرياضيات كلـــــية التربية السبت:2016/1/2

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يلى (الدرجة 120 موزعة بالتساوى) وضح اجابتك بالرسم

1-أ- أثبت أن $\nabla\varphi$ عمودى على السطح $\varphi(x,y,z)=const$.

ب- أحسب التكامل الخطى للحقل الأتجاهى $\underline{F}=5y\underline{i}-xz\underline{j}+3x\underline{k}$ على مسار المستقيم Γ الواصل من النقطة $(o,o,3)$ الى النقطة $(2,-8,3)$.

ج-اذا كان $\underline{A}=\underline{e}_r+\sin\theta\,\underline{e}_\theta,\ \underline{B}=\frac{a}{r^2}\sin\theta\,\underline{e}_r$ أوجد $(\underline{A}.\nabla)\underline{B}$.

2- أ-أحسب التكامل السطحى $\int_s f(x,y,z)da$ للسطح المنحنى فقط حيث $f=xz+3y-z$ والسطح s مكون من نصف اسطوانة محورها محور z ونصف قطر قاعدتها 3 ومستطيل فى المستوى xz ونصف دائرتين فى المستويين $z=0,z=4$.

ب-أحسب التكامل الحجمى $\int_v f(x,y,z)dv$ حيث $f=xz+3y-z$, v هو الحجم داخل السطح المقفل المكون من ثمن الكرة التى نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل وثلاثة أوجه كل منها ربع دائرة فى المستويات xy,yz,zx .

3-أ-اذكر بدون برهان منطوق نظرية ستوك – ثم حقق النظرية للمتجه $\vec{A}$ حيث

$\vec{A}=(2x-y)\underline{i}-yz^2\underline{j}-y^2z\underline{k}$ على السطح s الذى يكون السطح العلوى للكرة $x^2+y^2+z^2=1$, c هى حدودها .

ب- أكتب بدون برهان متجهات الوحدة فى الأحداثيات الكروية $\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_\varphi$.

4-أ- اذكر بدون برهان منطوق نظرية جاوس للانتشار- ثم أحسب التكامل السطحى المغلق $\oint_s \underline{F}.\underline{ds}$ حيث $\underline{F}=x(z\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})$ والسطح s هو السطح الذى يحد حجم نصف الكرة العلو $x^2+y^2+z^2\le a^2, z\ge 0$ ثم حقق اجابتك باستخدام نظرية جاوس للأنتشار.

ب- أوجد قيمة كل من $\frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi}$.

5-أ-باستخدام نظرية جاوس للأنتشار أحسب $\oiint_s \underline{F}.\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\underline{j} + yz\underline{k}$

والسطح هو المكعب الذى يحدده المستويات $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$

ب-أحسب التكامل الحجمى $\int_v f(x,y,z)dv$, حيث v هو الحجم داخل السطح s

و مكون من نصف اسطوانة محورها محور z ونصف قطر قاعدتها 3 ومستطيل فى

المستوى xz ونصفى دائرتين فى المستويين $z = 0, z = 4$, $f = xz + 3y - z$

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق

أ.د/محمود عبد العاطى

نموذج اجابة رياضة تطبيقية (3)

للفرقة الثالثة تعليم أساسى الفصل الأول 2016/2015

ورقة كاملة استاذ المادة ا.د/محمود عبد العاطى محمود – كلية العلوم

اجابة السؤال الأول

أ-نفرض أن $\underline{r} = x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k}$ هو متجه موضع أي نقطة $M(x, y, z)$ على السطح فيكون متجه موضع هذه النقطة بالنسبة لنقطة الأصل هو $\underline{r}$ وعليه فإنه إذا كان $M'(\underline{r} + d\underline{r})$ نقطة تحقق معادلة السطح فإن

$$d\underline{r} = dx\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\underline{k}$$

يقع على المســــتوى المماس عند $M\ 0$ وحيث $d\phi$ هي التفاضلة التامة للدالة ϕ فإنها

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$$

ويمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{aligned} d\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\underline{k}\right)\cdot(dx\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\underline{k}) \\ &= \nabla\phi\cdot d\underline{r} = 0 \end{aligned}$$

وهذا يعني أن المتجه $\nabla\phi$ يتعامد مع المتجه $d\underline{r}$ الذي يقع في المســتوى المماس للسطح عند النقطة $M\ 0$ وبذلك يكون $\nabla\phi$ عموديا على السطح عند النقطة $M\ 0$

1-ب- المسار بين النقطتين $(0,0,3)$ ، $(2,-8,3)$ عبارة عن خط مستقيم معادلته

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-8} = \frac{z-3}{0} = \lambda$$

$$\therefore x = 2\lambda\ ,\ y = -8\lambda\ ,\ z = 3 \quad , \quad 0 < \lambda < 1$$

متجه الموضع

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k} = 2\lambda\underline{i} - 8\lambda\,\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$d\underline{r} = 2(\underline{i} - 4\,\underline{j})\,d\lambda$$

$$\therefore \int_{\Gamma} \underline{F}\cdot\hat{t}\,dl = 2\int_0^2 (5y\underline{i} - xz\,\underline{j} + 3x\underline{k})\cdot(\underline{i} - 4\,\underline{j})\,d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[5(-8\lambda) + 4(2\lambda)(3)\right] d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[-40\lambda + 24\lambda\right] d\lambda = 2\int_0^1 \left[-16\lambda\right] d\lambda$$

$$= -32\left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 = -16$$

ج-1

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left[(\underline{e_r} + \sin\theta\,\underline{e_\theta})\cdot\nabla\right]\left\{\frac{a}{r^2}\sin\theta\,\underline{e_r}\right\}$$

باستخدام ∇ في الإحداثيات الكروية نجد أن

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{a}{r^2}\sin\theta\,\underline{e_r}\right)$$

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = -\frac{2a}{r^3}\sin\theta\,\underline{e_r} + \frac{a}{r^2}\sin\theta\,\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial r}$$

$$+\frac{a}{r^3}\sin\theta\cos\theta\,\underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial\theta}$$

ولكن

$$\frac{\partial\underline{e_r}}{\partial r} = 0 \qquad ، \qquad \frac{\partial\underline{e_r}}{\partial\theta} = \underline{e_\theta}$$

$$\therefore (\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \frac{a\sin\theta}{r^3}(-2+\cos\theta)\underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^3}\underline{e_\theta}$$

اجابة السؤال الثانى

أ- نصف الاسطوانة

$$\rho = 3 \quad , \quad 0<\phi<\pi \quad , \quad 0<z<4$$

$$da_1 = \rho\, d\phi\, dz$$

وكما نعلم أنه في الإحداثيات الاسطوانية

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

وعلى ذلك فإن أجزاء التكامل السطحي هي على الترتيب

$$\iint_{S_1} f\, da_1 = \int_0^4\int_0^\pi (3z\cos\phi + 9\sin\phi - z)3d\phi\, dz$$
$$= 3\left[\frac{3}{2}z^2\sin\phi - 9z\cos\phi - \frac{1}{2}z^2\phi\right]_{0,0}^{4,\pi}$$
$$= 3[9(4)(2) - 8\pi] = 24(9-\pi)$$

2-ب باستخدام الإحداثيات الكروية نعلم أن الحجم V يغطى بالفترات الآتية

$$0 < r < 2\ ,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

حيث

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y = r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z = r\cos\theta$$

والعنصر الحجمي هو

$$dv = r^2\sin\theta\, dr d\theta\, d\phi$$
$$\int_V f dv = \int_0^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[r^2\sin\theta\cos\phi\cos\theta + 3r\sin\theta\sin\phi\right.$$
$$\left. - r\cos\theta\right]\cdot r^2\sin\theta\, dr d\theta\, d\phi$$
$$= \int_0^2\int_0^{\pi/2}\left[r^2\sin^2\theta\cos\theta + 3r\sin^2\theta - \frac{\pi}{2}r\sin\theta\cos\theta\right]r^2 dr d\theta$$
$$= \int_0^2 dr\left[\frac{r^4}{3}\sin^3\theta + \frac{3r^2}{2}(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}) - \frac{\pi r^3}{4}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \int_0^2 dr\left(\frac{r^4}{3} + \frac{3\pi r^3}{4} - \frac{\pi r^3}{4}\right) = \left[\frac{r^5}{15} + \frac{\pi r^4}{8}\right]_0^2 = \frac{32}{15} + 2\pi$$

اجابة السؤال الثالث

ب- نظرية أستوك

إذا كان Γ مسار مقفل يحدد أي سطح S فيكون التكامل الخطي للمتجه $\underline{F}$ حول Γ يساوي التكامل السطحي لدوران المتجه $\underline{F}$ حول S 0 ويمكن صياغتها رياضياً كما يلي

$$\oint_\Gamma \underline{F}\cdot \hat{t}\, dl = \int_S (\nabla\wedge\underline{F})\cdot\underline{n}\, ds$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بالتفاف الحقل $\underline{F}$ حول المسار Γ وتوضح لنا هذه النظرية علاقة التفاف $\underline{F}$ حول Γ بمركبة دوران $\underline{F}$ في الاتجاه العمودي على المنطقة المحاطة بالمسار Γ 0

-الحـــل
الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x=\cos\theta \quad , \quad y=\sin\theta \quad , \quad z=0 \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A}\cdot \underline{dr}=\oint_c\left\{(2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz\right\}$$

$$=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)d\theta=\pi \qquad (1)$$

أيضاً

$$\nabla\wedge\underline{A}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z\end{vmatrix}=\underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=\int_S\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dydx$$

حيث $\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=dxdy$ على الدائرة $x^2+y^2=1$

$$\therefore\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=4\int_0^1\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,dx=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\pi \qquad (2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت 0

ب- متجهات الوحدة هي

$$\underline{e_r}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\underline{j}+\cos\theta\underline{k}$$

$$\underline{e_\theta}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\theta}=\cos\theta\cos\phi\underline{i}+\cos\theta\sin\phi\underline{j}-\sin\theta\underline{k}$$

$$\underline{e_\phi}=\frac{1}{h_3}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\phi}=-\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\underline{j}$$

اجابة السؤال الرابع

أ-نظرية جاوس للانتشار

إذا كان S سطح مقفل ويحوي الحجم V وكان متجه الوحدة $\hat{n}$ هو المتجه العمودي على السطح S وفي الاتجاه الخارج من الحجم V وكان الحقل الاتجاهي $\underline{F}$ معرفاً عند كل نقطة في الحجم V وعلى السطح S فإن

$$\oint_S \underline{F}\cdot\hat{n}\, da = \int_V \nabla\cdot\underline{F}\, dv$$

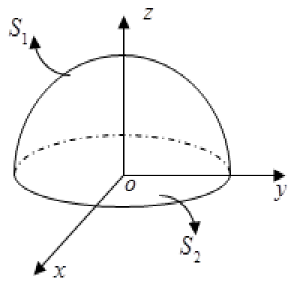
ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بفيض الحقل $\underline{F}$ من السطح S وتوضح لنا هذه النظرية علاقة فيض $\underline{F}$ من S بانتشار هذا الحقل $\underline{F}$ في الحيز الموجود بداخل S ، أي الحجم V 0

-الحـــل

باستخدام تعريف التكامل السطحي

حيث أن الســــطح Sسطح كروي فإن

معادلات التحويل هي



$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

على السطح S_1

$$\underline{ds_1} = \underline{n}\, ds_1 \quad , \quad \underline{n} = \underline{e_r} = \frac{\underline{r}}{r} \quad , \quad ds_1 = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\therefore \underline{ds_1} = \frac{1}{r}(x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k})\, ds_1$$

$$\therefore\ \underline{F}\cdot\underline{ds_1} = \frac{1}{r}(x^2 z + xy^2 + xz^2)\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

على السطح S_1 يكون

$$r = a \quad , \quad 0<\theta<\pi/2 \quad , \quad 0<\phi<2\pi$$

$$\oint_{S_1}\underline{F}\cdot\underline{ds_1} = a^4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\Big[\sin^3\theta\cos\theta\cos^2\phi + \sin^4\theta\sin^2\phi\cos\phi$$
$$+\sin^2\theta\cos^2\theta\cos\phi\Big]d\theta\, d\phi$$

$$= a^4\int_0^{\pi/2}\left\{\sin^3\theta\cos\theta\cdot\frac{1}{2}\left[\phi + \frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{2\pi}\right.$$
$$\left.+\sin^4\theta\left[\frac{\sin^3\phi}{3}\right]_0^{2\pi} + \sin^2\theta\cos^2\theta\left[\sin\phi\right]_0^{2\pi}\right\}d\theta$$

$$= \pi a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta = \frac{\pi a^4}{4} \qquad (1)$$

على السطح S_2

$$\underline{ds_2} = -\underline{k}\, ds_2 \quad , \quad \therefore \underline{F} \cdot \underline{ds_2} = -xz\, ds_2$$

ولكن على السطح S_2 كانت $z = 0$

$$\therefore \int_{S_2} \underline{F} \cdot \underline{ds_2} = 0 \qquad (2)$$

من (2),(1) نحصل على

$$\oint_S \underline{F} \cdot \underline{ds} = \frac{\pi a^4}{4}$$

ثانياً باستخدام نظرية جاوس

$$\oint_S \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_V \nabla \cdot \underline{F}\, dv$$

حيث

$$\nabla \cdot \underline{F} = z + 2x = r\cos\theta + 2r\sin\theta\cos\phi$$
$$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$\nabla \cdot \underline{F}\, dv = r^3(\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta\cos\phi)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

حيث

$$0 < r < a \quad , \quad 0 < \theta < \pi/2 \quad , \quad 0 < \phi < 2\pi$$

$$\int_V \nabla\cdot\underline{F}\, dv = \int_0^a \int_0^{\pi/2} r^3(\sin\theta\cos\theta[\phi]_0^{2\pi} + 2\sin^2\theta[\sin\phi]_0^{2\pi})\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a \int_0^{\pi/2} r^3 \sin\theta\cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{4} = \oint_S \underline{F} \cdot \underline{ds}$$

وهذا يحقق نظرية جاوس للانتشار وهو المطلوب

ب-

$$\frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial \underline{e}_1}{\partial u_3} = \frac{\underline{e}_3\, \partial h_3}{h_1 \partial u_1} = \frac{\underline{e}_\varphi \partial r \sin\theta}{1.\partial r} = \sin\theta\, \underline{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial \underline{e}_2}{\partial u_2} = -\frac{\underline{e}_3\, \partial h_2}{h_3 \partial u_3} - \frac{\underline{e}_1 \partial h_2}{h_1 \partial u_1} = -\frac{\underline{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial \varphi} - \frac{\underline{e}_r}{1}\frac{\partial r}{\partial r} = -\underline{e}_r$$

<u>اجابة السؤال الخامس</u>

أ- الحـــل

من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_v (\nabla \cdot \underline{F})\, dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x, y, z أي أن

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4z - y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2 - yz)_0^1 dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}$$

ب- حيث أن الحجم هو حجم نصف اسطوانة نستخدم الأحداثيات الأسطوانية (ρ, φ, z) حيث

$$x = \rho\cos\varphi \quad , y = \rho\sin\varphi \quad , z = z$$

ويكون عنصر الحجم هو

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz$$

حيث

$$3 \ge \rho \ge 0\,, \quad \pi \ge \varphi \ge 0 \quad , 4 \ge z \ge 0$$

$$\boldsymbol{f = \rho z\cos\varphi + 3\rho\sin\varphi - z}$$

أى أن التكامل الحجمى

$$\int_v fdv = \int_0^3 \int_0^\pi \int_0^4 (\rho z\cos\varphi + 3\rho\sin\varphi - z)\rho d\rho d\varphi dz$$

$$=\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 \sin\varphi\Big|_0^\pi \, z^2\Big|_0^4 - 3\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 \cos\varphi\Big|_0^\pi \, z\Big|_0^4 - \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^3 \varphi\Big|_0^\pi \, \frac{z^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= 0 - 3.9.(-2).4 - 9.\pi.4 = 9(24 - 4\pi)$$

<u>تمت الأجابة النموذجية لمادة رياضة تطبيقية (3)</u>

ا.د.محمود عبد العاطى محمود –كلية العلوم