كلية التربية

الفرقة الثانية عام - شعبة رياضيات

الفصل الدراسي الأول

2015م-2016م

تاريخ الامتحان: 2016/1/9

نموذج اجابة نصف ورقة

المادة: تطبيقات رياضية

أستاذ المادة : د / أحمد مصطفي عبدالباقي

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم ببنها

جامعة بنهـــــــــــا	دور يناير 2016 م	المــــادة: تطبيقات رياضية
كلية التربيــــــــــة		الزمــن: ساعة
قسـم الرياضيـــات		الفرقة: الثانية عام رياضيات
		التاريخ: 9/ 1/ 2016 م

أجب عن **ثلاثة فقط** من الأسئلــة الآتيـــة:

السؤال الأول :

سقطت قطرة مطر تحت تأثير وزنها في وسط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلتها عند اللحظة الزمنية t تساوى m وسرعتها v ومعدل ازدياد كتلتها λmv حيث λ ثابت . أثبت أنه عندما تهبط القطرة مسافة x فإن $\lambda v^2 = g\left(1-e^{-2\lambda x}\right)$.

السؤال الثاني :

تبحر سفينة A في اتجاه الشمال بسرعة مقدارها $12\,ml/hr$ وتبحر سفينة B تبعد عنها مسافة $10ml$ في اتجاه الشرق منها بسرعة مقدارها $16\,ml/hr$ غربا. أوجد متى تكون السفينتان أقرب ما يمكن وما هي أقل مسافة بينهما.

السؤال الثالث:

علقت سلسلة منتظمة طولها l من نهايتها a,b الواقعتين على خط أفقي واحد . فإذا كان الشد في أي طرف من السلسلة يساوي n من المرات الشد عند أسفل نقطة منها فأثبت أن

$$ab = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\ln(n+\sqrt{n^2-1}).$$

السؤال الرابع:

قذف جسيم من نقطة على مستوى يميل على الأفقي بزاوية β في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل وكان اتجاه القذف يعمل زاوية α مع المستوى المائل تعطى بالعلاقة $2\tan\alpha = \cot\beta$. إثبت أن الجسيم يقابل المستوى باتجاه حركة عمودية على المستوى وإثبت أن المدى على المستوى هو $2u^2\sin\beta / g(1+3\sin^2\beta)$.

انتهت الأسئلـــة،
متمنياً للجميع التوفيـــق والنجــاح،
د. أحمد مصطفي

نموذج الاجابة

السؤال الاول

$$\frac{dm}{dt}=\lambda mv$$

$$\because F=\frac{d}{dt}(m\,v)-u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow$ $\therefore u=0$

$\therefore$ معادلة الحركة تصبح على الصورة

$$\therefore F=\frac{d}{dt}(m\,v)\quad\Rightarrow\quad \therefore mg=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad \therefore mg=m\frac{dv}{dt}+\lambda mv^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=g-\lambda v^2\quad\Rightarrow\quad \therefore \int\frac{vdv}{g-\lambda v^2}=\int dx+c$$

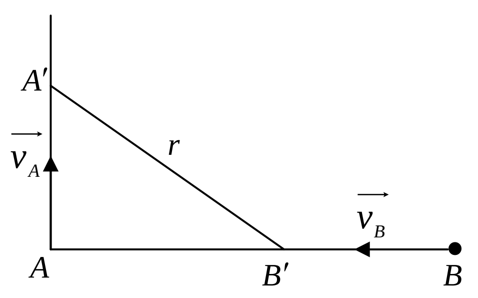
$$\therefore -\frac{1}{2\lambda}\log\left(g-\lambda v^2\right)=x+c$$

عندما $x=0,v=0$ نجد أن $c=-\log(g)/\lambda$

$$\therefore x=\frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g-\lambda v^2}\quad\Rightarrow\quad \therefore e^{2\lambda x}=\frac{g}{g-\lambda v^2}$$

$$\therefore g=\left(g-\lambda v^2\right)e^{2\lambda x}\quad\Rightarrow\quad \therefore \lambda v^2=g\left(1-e^{-2\lambda x}\right)\qquad (1)$$

السؤال الثانى:



المسافة AB عند لحظة البداية هي $\overline{AB} = 10ml$ وإذا اعتبرنـا محور x على امتداد الخط AB وتكون A عند نقطة الأصل فانه بعد الفترة الزمنية t تصبح السفينة A عند النقطة A' على محور y والسفينة B عند النقطة B' على محور x حيث أن:

$$\overrightarrow{v_A} = 12\,\hat{j} \quad , \quad \overrightarrow{v_B} = -16\hat{i}$$

وحتى نجد المسافة r بين السفينتين توجد إحداثيات A', B'

$$A' \equiv (0,12t) \quad , \quad B' \equiv (10-16t, 0)$$

وبذلك فان مربع المسافة r بدلالة الزمن t (ويلعب هنا دور البارمتر)

$$r^2 = (10-16t)^2 + (12t)^2$$

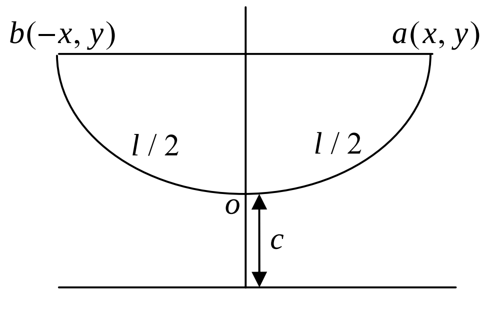
وبحساب المشتقة للطرفين بالنسبة للبارمتر t نجد :

$$r\frac{dr}{dt} = (10-16t)(-16) + (12t)(12) = 16[-10+16t+9t]$$
$$= 16(25t-10)$$

وحتى تكون المسافة r أقل ما يمكن وكذلك r^2 فإننا نضع $\frac{dr}{dt} = 0$ ونجد إذن أن الزمن T اللازم حتى تصبح السفينتان أقرب ما يمكن هو $T = 10/25 = 0.4hr$ وبالتالي نجد :

$$r^2 = (10-6.4)^2 + (4.8)^2 = (3.6)^2 + (4.8)^2 = 36 \Rightarrow r = 6mi$$

السؤال الثالث:



$$T_a = \omega y$$
$$T_\circ = \omega c$$
$$\because T_a = nT_\circ$$
$$\therefore \omega y = n\omega c \qquad (1)$$

$$\because y^2 = c^2 + s^2 \qquad (2)$$

$$n^2c^2 = c^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \therefore c = \frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

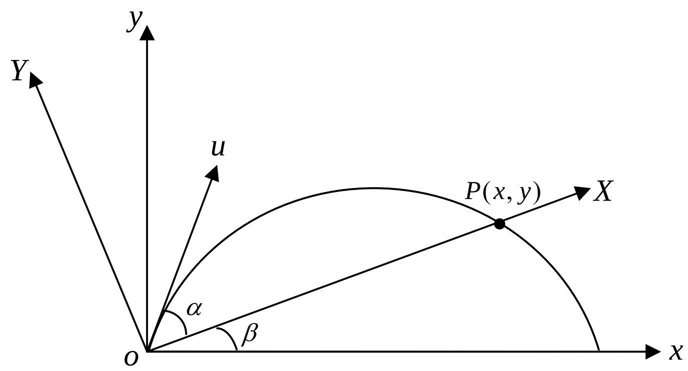
والمطلوب هو إيجاد طول ab وهو يساوي $2x$

$$\because y = c\cosh\frac{x}{c} \Rightarrow \therefore x = c\cosh^{-1}\frac{y}{c}$$

$$= c\cosh^{-1} n = c\,\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$

$$\therefore ab = 2x = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\ln(n+\sqrt{n^2-1})$$

السؤال الرابع:



نأخذ المحور oX في اتجاه المستوى المائل والمحور oY في الاتجاه العمودي عليه0

نفرض أن مسار القذيفة يمر بالنقطة $P(x,y)$ وأن هذه النقطة منسوبة للمحورين ox,oy 0 نجد أن زاوية القذف تميل بزاوية α على المستوى المائل وبذلك فإن سرعة القذف تميل بزاوية $(\alpha+\beta)$ على المحور الأفقي ox وبذلك تكون معادلة المسار هي

$$y = x\tan(\alpha+\beta) - \frac{g\,x^2}{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)} \qquad (1)$$

معادلة المستوى المائل هي

$$y = x\tan\beta \qquad (2)$$

بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نجدأن

$$x\tan\beta = x\tan(\alpha+\beta) - \frac{g\,x^2}{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}$$

$$x[\tan(\alpha+\beta) - \tan\beta] = \frac{g\,x^2}{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}$$

$$[\tan(\alpha+\beta) - \tan\beta] = \frac{g\,x}{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}$$

ومن ذلك نجد أن الإحداثي x يعطى بالمعادلة

$$\therefore x=\frac{2u^2}{g}\cos^2(\alpha+\beta)\left[\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta\right] \qquad (3)$$

ميل سرعة الجسيم عند أي موضع يكون

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{dy}{dx}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{g\,x}{u^2\cos^2(\alpha+\beta)} \qquad (4)$$

من المعادلة (3),(4) نحصل على

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\alpha+\beta)-\frac{g\,x}{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}$$

$$=\tan(\alpha+\beta)-\frac{g\times 2u^2\cos^2(\alpha+\beta)\left[\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta\right]}{u^2\cos^2(\alpha+\beta)\times g}$$

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\alpha+\beta)-2\left[\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta\right] \qquad (5)$$

وحيث ان $\tan\alpha=\frac{1}{2}\cot\beta$ بالتعويض في المعادلة (5) نجد أن

$$\frac{dy}{dx}=-\tan(\alpha+\beta)+2\tan\beta=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+2\tan\beta$$

$$=-\frac{\frac{1}{2}\cot\beta+\tan\beta}{1-\frac{1}{2}\cot\beta\tan\beta}+2\tan\beta$$

$$=-2\left[\frac{1}{2}\cot\beta+\tan\beta\right]+2\tan\beta=-\cot\beta$$

أي أن ميل السرعة m يساوي $m=-\cot\beta$ وميل المستوى m_1 يساوي $m_1=\tan\beta$ ونلاحظ أن $m\times m_1=-1$ أي ان حركة الجسيم عند النقطة $P(x,y)$ تكون عمودية على المستوى 0 وبالتعويض في المعادلة (3) نحصل على المدى oP حيث

$$\cos\beta=\frac{x}{oP} \quad \Rightarrow \quad \therefore oP=\frac{x}{\cos\beta}$$

$$oP=\frac{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}{g\cos\beta}\left[\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta\right]$$

$$=\frac{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}{g\cos\beta}\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{2u^2\cos^2(\alpha+\beta)}{g\cos\beta}\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos\beta}\right]$$

$$= \frac{2u^2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{g\cos^2\beta} = \frac{2u^2\sin\alpha}{g}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos^2\beta}$$

$$= \frac{2u^2\sin^2\alpha}{g}\,\frac{(\cot\alpha\cos\beta - \sin\beta)}{\cos^2\beta} = \frac{2u^2}{g}\,\frac{(\cot\alpha - \tan\beta)}{\cos ec^2\alpha\cos\beta}$$

باستخدام العلاقة $\cot\alpha = 2\tan\beta$ نحصل على المدى oP على المستوى المائل حيث

$$oP = \frac{2u^2}{g}\,\frac{(2\tan\beta - \tan\beta)}{\cos\beta(1+\cot^2\alpha)} = \frac{2u^2}{g}\,\frac{\tan\beta}{\cos\beta(1+4\tan^2\beta)}$$

$$= \frac{2u^2}{g}\,\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta\left(1+4\dfrac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right)} = \frac{2u^2}{g}\,\frac{\sin\beta}{(1+3\sin^2\beta)}$$

Dr. Ahmed Mostafa