جامعة بنـها
كلية االعلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النـهائى
يناير 2016
الزمن: ساعتان

جبر (٢) ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: الثانية ـ تربية عام

شعبة: الرياضيات

يوم الامتحان: الاثنين ٤ / ١ / ٢٠١٦م

المادة : جبر (٢)

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النهائى
يناير 2016
الزمن: ساعتان

جبر (٢) ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

اجب عن الأسئلة الآتية:-

السؤال الأول :-

اعتبر المصفوفات ${}_mA_p$ ، ${}_pB_n$ ، $C = AB$. اثبت ما يأتى:

(i) إذا وجد فى A صف جميع عناصره اصفار فإنه يوجد فى C صف جميع عناصره اصفار .ادرس الحالة BA إذا كانت موجودة.

(ii) العمود j (مثلا) للمصفوفة C يساوى حاصل ضرب A فى العمود B_{-j} أى أن $C_{-j} = A\,B_{-j}$

السؤال الثاني :-

إذا كان $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ فأوجد مصفوفة B رتبتها $r = 2$ تحقق الشرط $AB = 0$. هل توجد مصفوفه B رتبتها $r > 2$ تحقق $AB = O$ ؟

السؤال الثالث :-

ليكن V هو P_1 فضاء كثيرات الحدود من درجة أقل من أو تساوى 1. و ليكن $S = \{X_1 , X_2\}$ ، $T = \{Y_1 , Y_2\}$ أساسان مختلفان للفضاء P_1 حيث

$$X_1 = t \quad , \quad X_2 = t - 3 \qquad ، \qquad Y_1 = t - 1 \quad , \quad Y_2 = t + 1$$

(i) احسب مصفوفة الإنتقال P من الأساس T للأساس S.

(ii) تحقق من أن $[x]_S = P[x]_T$ حيث المتجة x هو $x = 5t + 1$.

(iii) احسب مصفوفة الإنتقال Q من الأساس S للأساس T و بين أن $Q = P^{-1}$.

السؤال الرابع:-

(i) أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصاحبة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

(ii) لتكن الفئة $\{1, t , e^t , t e^t\}$ أساس لفضاء متجه V للدوال $f : R \to R$ وليكن $\hat{D} \equiv \dfrac{d}{dt}$ هو المؤثر التفاضلي على V أي أن $\hat{D} f = \dfrac{d}{dt} f$. أوجد مصفوفة $\hat{D}$ في الأساس المفروض.

مع أطيب التمنيات بالنجاح،،،

د/ محمد السيد نصر

السؤال الأول :-

$$C = AB \Rightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj} \quad , i=1,2,\dots,m \ ; \ j=1,2,\dots,n \qquad (1)$$

(i) بفرض أن جميع عناصر الصف i للمصفوفة A أصفار أى أن

$$A_{i-} = 0 \Rightarrow \ a_{ik} = 0 \ , \forall\ k = 1,2,\dots,p$$

بالتعويض فى (1) نجد أن

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} 0.\, b_{kj} = 0 \qquad \forall\ j=1,2,\dots,n \quad ; \quad i \quad \text{is fixed}$$

أى أن جميع عناصر الصف i لحاصل الضرب C تساوى أصفار. الحالة BA غير موجودة.

(ii)

$$C_{-j} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}\ b_{kj} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}\ b_{kj} \\ \vdots \quad \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}\ b_{kj} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

وحيث أن

$$B_{-j} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

من (2) و (3) يتضح أن $C_{-j} = AB_{-j}$ أى أن العمود j لحاصل الضرب C يساوى حاصل ضرب A فى العمود j للمصفوفة B .

السؤال الثاني :-

حيث أنه لأى A, B, C بحيث $AB = C$ يكون $C_{-j} = A B_{-j}$

على ذلك تكون أعمدة B التى تحقق $AB = 0$ هى مصفوفات أعمدة X تحقق $AX = 0$ أى أنها مصفوفات حل المنظومة المتجانسة $AX = 0$

و لكى تكون رتبة B تساوى 2 فإن أعمدة B يكون من بينها على التحديد عمودان هما حلان أساسيان متباينان لمنظومة المعادلات $AX = 0$ أى

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

حيث أن

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

و يكون رتبة A تساوى رتبة B تساوى 1

أى أن $r = 1$

وحيث أن $n = 3$

فإن عدد الحلول الأساسية المتباينة يساوى $(n - r) = 2$

– تعيين المجاهيل الرئيسية للمنظومة (1)

$$x_1 = - x_2 - 2\, x_3$$

و يكون الحل

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2\, X_1 + x_3\, X_2$$

حيث $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ حلان أساسيان متمايزان

و تكون المصفوفة B التى رتبتها $r = 2$ و تحقق $AB = 0$ هى

$$B = \begin{pmatrix} -r & -2t \\ r & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

حيث r و t هى بارامترات (ثوابت اختيارية) تأخذ جميع القيم ماعدا $r = 0$ و $t = 0$. لا توجد مصفوفه B رتبتها $r > 2$ تحقق $AB = O$.

السؤال الثالث :-

(i) لإيجاد P نعبر عن عناصر الأساس T كتركيب خطى من عناصر الأساس S حيث أن

$$Y_1 = (2/3)\, X_1 + (1/3)\, X_2$$
$$Y_2 = (4/3)\, X_1 - (1/3)\, X_2$$

ثم نستخدم الشكل

$$(Y_1 \quad Y_2) = (X_1 \quad X_2) \begin{pmatrix} 2/3 & 4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

و يكون

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left([Y_1]_S \quad [Y_2]_S \right)$$

(ii) لنتحقق من أن $[X]_S = P[X]_T$

نوجد أولا متجهات الإحداثيات $[X]_T$, $[X]_S$ للمتجه $X = 5t + 1$

بكتابة

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$$
$$5t + 1 = (c_1 + c_2)t - 3c_2$$

بمساواة المعاملات المتناظرة و حل منظومة المعادلات الناتجة نجد

$$X = \frac{16}{3} X_1 - \frac{1}{3} X_2$$

و يكون

$$[X]_S = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

و بإتباع نفس الخطوات نجد

$$[X]_T = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 3 \end{pmatrix}$$

التحقق

$$P[X]_T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ -1 \end{pmatrix} = [X]_S$$

(iii) لإيجاد Q نعبر عن عناصر S كتركيب خطى من عناصر الأساس T وحيث أن

$$X_1 = \frac{1}{2} Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 \quad , \quad X_2 = 2Y_1 - Y_2$$

فإن

$$\left(X_1 \quad X_2 \right) = \left(Y_1 \quad Y_2 \right)\begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

و يكون

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [X_1]_T & [X_2]_T \end{pmatrix}$$

و الآن

$$Q\,P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

و يكون

$$Q = P^{-1}$$

السؤال الرابع:-

(i) المعادلة المميزة هى

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

جذور المعادلة هي:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = -1$$

لنكون المنظومة (5. 2)

$$\left.\begin{aligned} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 10x_1 - (19+\lambda)x_2 + 10x_3 &= 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

بالتعويض في (1) عن بالقيمة 1 نحصل على

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 &= 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

رتبة مصفوفة هذه المنظومة $r_1 = 1$ لذلك هذه المنظومة تكافئ معادلة واحدة مثل:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

الحل العام لهذه المعادلة هو

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_2 X_1 + x_3 X_2$$

حيث $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ حلان أساسيان (مستقلان خطياً)

يكونان أساس للفضاء اللا متغير (الذاتي) المصاحب للقيمة الذاتية $\lambda = 1$ لذلك $\dim V_{\lambda=1} = 2$. ويكون

$$V_{\lambda=1} = \{ X : X = x_2 X_1 + x_3 X_2 \quad , x_2 \in R , \ x_3 \in R \}$$

بالتعويض في (1) عن بالقيمة $\lambda = -1$ نحصل على

$$\left. \begin{aligned} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 &= 0 \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (3)$$

رتبة هذه المنظومة $r_2=2$ عدد الحلول الأساسية $(n-r_2)=1$

الحل العام للمنظومة (3) هو

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\, x_3 \\ 5/6\, x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = t X_1$$

ويكون $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ أساس للفضاء $V_{\lambda=-1}$ لذلك $\dim V_{\lambda=-1} = 1$.

حيث $V_{\lambda=-1} = \{ X : X = t X_1 , \quad t \in R \}$

(ii)

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}(1) &= 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot e^t + 0\cdot t e^t \\ \hat{D}(t) &= 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot e^t + 0\cdot t e^t \\ \hat{D}(e^t) &= e^t = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 1\cdot e^t + 0\cdot t e^t \\ \hat{D}(t e^t) &= e^t + t e^t = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 1\cdot e^t + 1\cdot t e^t \end{aligned} \right\} \qquad \text{(i)}$$

من (i) تكون مصفوفة $\hat{D}$ في الأساس المفروض هي:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$