جامعة بنـها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ـــ الامتحان النـهائى
يناير 2016
الزمن: ساعتان

رياضيات (٣) ـــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعب الفيزياء والكيمياء) ـــ كلية التربية

جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: الثانية ـ تربية عام

شعب: الفيزياء والكيمياء

يوم الامتحان: السبت ٩ / ١ / ٢٠١٦م

المادة : رياضيات (٣) جبر خطى

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النهائى
يناير 2016
الزمن: ساعتان

رياضيات (٣) ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعب الفيزياء والكيمياء) ــ كلية التربية

جبر خطى

اجب عن الأسئلة الآتية:−

السؤال الأول :−

ليكن $\hat{T}$ هو المؤثر الخطي على R^2 المعرف كما يلي:

$$\hat{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

وليكن $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ الأساس المعتاد لـ R^2 ، $e_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ أساس آخر لـ R^2

أوجد ما يأتي:

(i) مصفوفة $\hat{T}$ في الأساس $\{e\}$ أي $[\hat{T}]_e$ وكذلك في الأساس $\{e^*\}$ أي $[\hat{T}]_{e^*}$.

(ii) مصفوفة الانتقال للإحداثيات P من الأساس $\{e\}$ للأساس $\{e^*\}$.

(iii) مصفوفة الانتقال للإحداثيات Q من الأساس $\{e^*\}$ للأساس $\{e\}$. واثبت أن $Q = P^{-1}$.

(iv) استخدم النتائج السابقة للتحقق من أن $[\hat{T}]_{e^*} = P\,[\hat{T}]_e\,Q$.

السؤال الثاني :−

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصاحبة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مـع أطـيب التمنيـات بالنجـاح،،،

د/ محمد السيد نصر

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النهائى
يناير 2016
الزمن: ساعتان

رياضيات (٣) ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعب الفيزياء والكيمياء) ــ كلية التربية

السؤال الأول :-

(i) حيث أن $\hat{T}(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{T}(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

إذن
$$[\hat{T}]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = T$$

حيث أن
$$\hat{T}(e_1^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_1^* + e_2^*$$
$$\hat{T}(e_2^*) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_1^* + 2e_2^*$$

إذن
$$[\hat{T}]e^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = T^*$$

(ii) مصفوفات الانتقال للإحداثيات:

حيث أن
$$e_1^* = e_1 + e_2$$
$$e_2^* = -e_1$$

كذلك
$$e_1 = -e_2^*$$
$$e_2 = e_1^* + e_2^*$$

فإن
$$(e_1 \quad e_2) = (e_1^* \quad e_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة انتقال الإحداثيات P من الأساس $\{e\}$ للأساس $\{e^*\}$ يكون:
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) كذلك حيث أن
$$(e_1^* \quad e_2^*) = (e_1 \quad e_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

تكون مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e^*\}$ للأساس $\{e\}$ هي:

$$Q=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

إذن
$$Q\ P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ويكون
$$Q=P^{-1}$$

(iv)
$$T^{*}=P\ T\ Q=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

السؤال الثاني :-

القيم الذاتية: حيث أن A قطرية فإن قيمها الذاتية تكون عناصرها القطرية أى أن

$$\lambda_1=0\ ,\quad \lambda_2=1$$

المتجهات الذاتية: سوف نبين الآن أن المتجهات اللامتغيره هي متجهات أساس قياسيه.

(i) $\lambda=0\ ,\quad X_{\lambda=0}=?$

بحل المنظومة

نجد

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}0\cdot x_1+0\cdot x_2=0\\ 0\cdot x_1+1\cdot x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ x_2=0$$, x_1 عدد حقيقى

و حيث أنه لأى قيمة ذاتية λ يكون $X_\lambda\neq 0$ فإن

$X_{\lambda=0}=c\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ حيث c عدد حقيقى لا يساوى صفر.

(ii) $\lambda=1\ ,\quad X_{\lambda=1}=?$

بحل المنظومة

نجد

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{matrix}-1\cdot x_1+0\cdot x_2=0\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$ عدد حقيقى x_2 , $x_1=0$

$X_{\lambda=1}=c\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ حيث c عدد حقيقى لا يساوى صفر.