جامعة بنها – كلية التربيه

امتحان الفرقة الثانية اساسى

شعبة الرياضيات

يوم الامتحان: السبت ٢٣ / ١ / ٢٠١٦ م

المادة : جبر (٢) (نصف ورقة)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال عبدالغنى

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

اسئله + نموذج إجابه

نصف ورقة

جـــامعة بنـــــها
كلـية الـــــعلوم
قسـم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
جبر (٢) & تحليل رياضى(٢)
التاريخ: 23/١/٢٠١٦

جبر (٢) & تحليل رياضى (٢) ــ لطلاب الفرقة الثانية -تربية أساسى ــ كلية التربية

أولاً: الجبر الخطى

أجب على الاسئله التاليه: السؤال الأول (60 درجة) :-

١. **أوجد** حل نظام المعادلات الأتية بإستخدام طريقة جاوس.

$$\begin{aligned}3x-2y+z&=-3\\ x+y+z&=5\\ x-2y-z&=-9\\ y+z&=6\end{aligned}$$

٢. إذا كان V فراغ إتجاهى على الحقل K , W_1, W_2, W_2 تكون فراغات جزئية من الفراغ V ، **فبرهن أن** $W_1+W_2+W_2$ تكون فراغاً جزئيا من V حيث

$$W_1+W_2+W_2 := \{w_1+w_2+w_3 : w_i \in W_i, i=1,2,3\}$$

٣. **أوجد** معكوس المصفوفةA (إن وجد) بأستخدام العمليات الاولية على الصفوف:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 2\\ -3 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

السؤال الثانى (60 درجة) :-

١. إذا كان الراسم $T: R^3 \to R^3$ تحويلاً خطياً يحقق $T(e_1)=e_2+e_3,\ \ T(e_2)=e_3+e_1,$ $T(e_3)=e_1+e_2$ حيث $\{e_1,e_2,e_3\}$ هو الأساس القياسى للفراغ R^3 . **أحسب** $T(2,-1,-3)$ ثم **أثبت** أن $\{T(e_1) ، T(e_2) ، T(e_3)\}$ تكون أساساً للفراغ R^3 ، ثم **أوجد** إحداثيات المتجه $(2,-1,-3)$ بالنسبة لهذا الأساس.

٢. **أوجد** القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوقة A:

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

٣. إذا كان الراسم $T: R^3 \to R^3$ تحويلاً خطياً على الحقل R ، حيث

$$T(x,y,z)=(0,y,z),\ (x,y,z)\in R^3$$

أوجد فراغ كلاً من $\boldsymbol{KerT},\ \ \boldsymbol{Im}\ T$ ثم **تحقق** من قانون سلفستر.

-------------- انتهت أسئلة الجبر ---

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

نموذج اجابه لأمتحان جبر (٢) & تحليل رياضى (٢) ــ لطلاب الفرقة الثانية

تربية أساسى ــ كلية التربية (الدرجة الكلية ١٢٠ درجة)

اجابة السؤال الأول (٦٠ درجة):

١. **أوجد** حل نظام المعادلات الأتية بإستخدام طريقة جاوس.

$$3x - 2y + z = -3$$
$$x + y + z = 5$$
$$x - 2y - z = -9$$
$$y + z = 6$$

الحــــــــــــل

المصفوفة الموسعةهى:

$$(A/b) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \to -3r_1 + r \\ r_3 \to -r_1 + r_3}]{r_2 \leftrightarrow r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -2 & -18 \\ 0 & -3 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -2 & -14 \\ 0 & -5 & -2 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to 5r_2 + r_4]{r_3 \to 3r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

اى ان الحل هو

$$x = -1, \quad y = 2, \quad z = 4$$

==

٢. إذا كان V فراغ إتجاهى على الحقل K , W_1, W_2, W_2 تكون فراغات جزئية من الفراغ V ،
فبرهن أن $W_1 + W_2 + W_2$ تكون فراغاً جزئيا من V حيث

$$W_1 + W_2 + W_2 := \{w_1 + w_2 + w_3 : w_i \in W_i, i = 1,2,3\}$$

الحــــــــــــل

$0 = 0 + 0 + 0 \in W_1 + W_2 + W_3$ فالمجموع $W_1 + W_2 + W_3$ غير خالى

$$, \quad \alpha \in K \;\; u, v \in W_1 + W_2 + W_3$$

فانه يوجد $u_1, u_2 \in W_1 ,\ v_1, v_2 \in W_2,\ s_1, s_2 \in W_3$

$$\alpha u_1 + u_2 \in W_1 ,\ \alpha v_1 + v_2 \in W_2,\ \alpha s_1 + s_2 \in W_3$$

اذن

$$\alpha u + v = \alpha(u_1 + v_1 + s_1) + (u_2 + v_2 + s_2) \in W_1 + W_2 + W_3$$

===

٣. **أوجد** معكوس المصفوفةA (إن وجد) بأستخدام العمليات الاولية على الصفوف:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

الحـــــــــــــل

$$A = \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow -1r_1]{r_3 \leftrightarrow r_1} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftrightarrow -3r_1 + r_3]{r_3 \leftrightarrow 2r + r_2} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow \frac{1}{4} r_2} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow -2r_2 + r_3} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{-1}{2} & -4 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow \frac{1}{-2} r_3} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{-1}{2} \end{array} \right\rangle$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow -2r_3 + r_1]{r_3 \leftrightarrow \frac{1}{2} r_3 + r_2} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{-1}{2} \end{array} \right\rangle \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow -r_1]{r_1 \leftrightarrow -1r_3 + r_1} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{9}{2} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 2 & \frac{-1}{2} \end{array} \right\rangle$$

اذن

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{9}{2} & \frac{-5}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & 2 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

أجابة السؤال الثانى (٦٠ درجة) :-

١. إذا كان الراسم $T:R^3 \to R^3$ تحويلاً خطياً يحقق $T(e_1)=e_2+e_3\,,\ \ T(e_2)=e_3+e_1\,,$ $T(e_3)=e_1+e_2$ حيث $\{e_1,e_2,e_3\}$ هو الأساس القياسى للفراغ R^3 . **أحسب** $T(2,-1,-3)$ ثم **أثبت** أن $\{T(e_1)$ ، $T(e_2)$،$T(e_3)\}$ تكون أساساً للفراغ R^3 ، ثم **أوجد** إحداثيات المتجه $(2,-1,-3)$ بالنسبة لهذا الأساس.

الحـــــــــــــل

نحسب:

$$T[e_1]=T[(1,0,0)]=(0,1,0)+(0,0,1)=(0,1,1)$$

$$T[e_2]=T[(0,1,0)]=(1,0,0)+(0,0,1)=(1,0,1)$$

$$T[e_3]=T[(0,0,1)]=(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)$$

$$T[(2,-1,-3)]=T[2e_1-e_2-3e_3]=2T(e_1)-T(e_2)-3T(e_3)=2(0,1,1)-(1,0,1)-3(1,1,0)=(-4,-1,1)$$

نريد اثبات المجموعة الاتية $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ تعمل اساس :

المجموعة تولد الفراغ V ومستقلة خطياً على K
إذا كان

$$(a,b,c)=\alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1)+\gamma(1,1,0)$$

ومنها نحصل على
$$a=\beta+\gamma$$
$$b=\alpha+\gamma$$
$$c=\alpha+\beta$$
وبحل هذا النظام نحصل على

$$(a,b,c)=\frac{1}{2}\{c+b-a\}(0,1,1)+\frac{1}{2}\{c+a-b\}(1,0,1)+\frac{1}{2}\{a+b-c\}(1,1,0)$$

وهو يعنى ان المجموعة تولد الفراغ R^3 .

أيضاً مستقلين خطياً لأنه إذا كان

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0,\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\in R$$

نستنتج من (١) ان $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ مما سبق ينتج ان المجموعة $\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ تمثل أساساً للفراغ R^3 على R .

ولايجاد احداثيات المتجه $\{(2,-1,-3)$ بالنسبة لهذا الاساس نعوض عن

$$a=2,b=-1,c=-3$$

فى المتجه
$$\begin{pmatrix} \alpha = \frac{1}{2}\{c+b-a\} = -3 \\ \beta = \frac{1}{2}\{c+a-b\} = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2}\{a+b-c\} = 2 \end{pmatrix}$$

==

٢. أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

الحــــــــــــل

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0$$

وبالتالى يكون القيم الذاتية هى $\lambda = 2, 2$

عندما $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

النظام يؤول إلى $x - y = 0$

المتجه الذاتى للقيمة الذاتية $\lambda = 2$ هو $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

٤. إذا كان الراسم $T : R^3 \to R^3$ تحويلاً خطياً على الحقل R، حيث

$$T(x,y,z) = (0,y,z),\ (x,y,z) \in R^3$$

أوجد فراغ كلاً من $\mathbf{Im}\ T$, $\mathbf{Ker}T$ ثم **تحقق** من قانون سلفستر.

الحــــــــــــل

$$\ker T = \{(x,y,z) : T(x,y,z) = (0,0,0)\}$$
$$(0,y,z) = (0,0,0)$$

من ثم $\ker T = \{(x,0,0) : x \in R\} = <(1,0,0)>$

عدده واحد

بالنسبة $\mathbf{Im}\ T$

$$\operatorname{Im} T = \{T(x,y,z) : (x,y,z) \in R^3\}$$
$$= \{(0,y,z)\ y, z \in R\}$$
$$(0,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

اي ان $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ *تولد فراغ* $\mathbf{Im}\ T$ *وهما مستقلين ايضا وبالتالى يكون اساس لـ* $\mathbf{Im}\ T$
وعددهم ٢ وهوما يتفق مع قانون سيلفستر