كلية التربية
قسم الرياضيات

نموذج إجابة
٢٠١٥/٢٠١٦

الفرقة الأولى عام
شعبة رياضيات
المادة: تحليل رياضي (١)

إجابة السؤال الأول

أ) لإثبات أن الدالة $g(x)$ فردية نكتب:

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -g(x)$$

وهذا لا يحدث إلا إذا كانت نطاق الدالة f متماثل حول نقطة الأصل هذا موجود وبالتالي الدالة g داله فرديه.

ب) بما أن $f(x) = 2x-3$ ، $g(x) = x^2+1$ إذاً

$$D_f = \mathbb{R},\ R_f = \mathbb{R},\ D_g = \mathbb{R},\ R_g = [1,\infty[$$

وكذلك

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = (2x-3)^2+1$$
$$= 4x^2 - 12x + 9 + 1 = 2(2x^2 - 6x + 5)$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = 2(x^2+1) - 3$$
$$= 2x^2 - 1$$

ونلاحظ إنه لإيجاد نطاق كل من $g\circ f$ ، $f\circ g$ نكتب:

$$R_f \subseteq D_g \Rightarrow D_{g\circ f} = D_f = \mathbb{R}$$

$$R_g \subseteq D_f \Rightarrow D_{f\circ g} = D_g = \mathbb{R}$$

ولإيجاد المدى نكتب:

$$\because\ -\infty < x < \infty \Rightarrow 0 \le x^2 < \infty \Rightarrow 0 \le 2x^2 < \infty$$

$$\Rightarrow -1 \le 2x^2 - 1 < \infty \Rightarrow R_{f\circ g} = [-1,\infty[$$

وأيضاً

$$-\infty < x < \infty \Rightarrow -\infty < 2x < \infty \Rightarrow -\infty < 2x-3 < \infty$$

$$\Rightarrow 0 \le (2x-3)^2 < \infty \Rightarrow 1 \le (2x-3)^2 + 1 < \infty$$

$$\Rightarrow R_{g\circ f} = [1,\infty[$$

(2)

إجابة السؤال الثاني

(أ) لإثبات النهاية يجب أن يكون

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

بفرض أن $f(x) = cx+d$ ، $l = ca+d$ وبالتالي فإنه

لكل $\varepsilon > 0$ يكون:

$|cx+d-ca-d| = |cx-ca| = |c||x-a| < \varepsilon$

أي أن $|x-a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ وبوضع $\delta = \frac{\varepsilon}{|c|}$ إذاً

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \frac{\varepsilon}{|c|} : |x-a| < \delta \Rightarrow |cx+d-(ca+d)| < \varepsilon$

وعليه فإن

$$\lim_{x \to a} (cx+d) = ca+d$$

(ب) لإيجاد النهاية نوجد ما يلي:

$f(x) = \begin{cases} x^3-3, & x<1 \\ x+2, & x \geq 1 \end{cases}$:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+2) = 3,$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3-3) = -2$

وعليه فإن

إذاً

$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ ليست موجودة وبالتالي الدالة

غير متصلة، رغم $f(1) = 3$ موجودة لأن

$\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

إجابة السؤال الثالث

(أ)

$$\frac{dy}{dx} = \sin^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{1-x^2}\right) + \sin(2x)}\right) + (x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left[\left(\frac{x}{1-x^2}\right)+\sin(2x)\right]}} \cdot \left[\frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} + 2\cos(2x)\right]$$

(٣) (ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot 2\cos(2x) + \left(x^{\tan(x)}\right)'$

ولإيجاد الحد الثاني من المشتقة نأخذ نضع

$u = x^{\tan(x)} \Rightarrow \ln u = \tan(x) \ln(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{u} u' = \frac{\tan(x)}{x} + \sec^2(x) \ln(x)$

$\Rightarrow \left(x^{\tan(x)}\right)' = \left(x^{\tan(x)}\right)\left(\frac{\tan(x)}{x} + \sec^2(x)\ln(x)\right)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cot(2x) + \left(x^{\tan(x)}\right)\left(\frac{\tan(x)}{x} + \sec^2(x)\ln(x)\right)$

(iii) $\frac{dy}{dx} = (2e)\cosh(ex) e^{2\sinh(ex)} + 5^{\tanh^{-1}(x)} \ln(5) \cdot \left(\frac{1}{1-x^2}\right) - (2x)\operatorname{cosec}^2(x^2)$.

(ب) $y = \sin^{-1}(x)/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^{(1)} = \left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} - \sin^{-1}(x) \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right] / (1-x^2)$

$\Rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{(1-x^2)}(1 + xy) \Rightarrow (1-x^2) y^{(1)} - xy = 1 \rightarrow (1)$

باستخدام نظرية ليبنتز للعلاقة (1) n مرة نجد أن ؛

$(1-x^2) y^{(n+1)} - 2xny^{(n)} - \frac{2n(n-1)}{2} y^{(n-1)} - xy^{(n)} - ny^{(n-1)} = 0$

$\therefore (1-x^2) y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2 y^{(n-1)} = 0$ وهو المطلوب أثباته.

(٤) إجابة السؤال ١/١/ج

$f(x) = 1 - (x^2/2) \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$

نلاحظ أن المشتقة موجودة على الفترة $[-2,4]$ كلها ومن ثم فإنه

٤) مجمل النقاط المتوقع أن يوجد عندها قيم عظمى أو صغرى محلية هي: $x=0,\ x=-2,\ x=4$

$$\therefore f(0)=1 \ ,\ f(-2)=1-(4/2)=-1 \ ,\ f(4)=1-\frac{16}{2}=1-8=-7$$

وعليه فإن القيم العظمى والصغرى المحلية على الترتيب هي: 1 ، -7 عند $x=0$ ، $x=4$.

ب) $f(x)=x^2-3x \Rightarrow f(0)=0=f(3)$ ، ونلاحظ أن الدالة متصلة على الفترة $[0,3]$ وكذلك قابلة للتفاضل على الفترة $]0,3[$ وعليه فإن تحقق نظرية رول إذاً يوجد نقطة $\xi\in]0,3[$ بحيث أن $f'(\xi)=0$ ومنه نجد أن:

$$f'(\xi)=2\xi-3=0 \Rightarrow \xi=\frac{3}{2} \Rightarrow \xi\in]0,3[$$

ج) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan(x))^{\tan(2x)} = 1^{\infty}$ فيه عدم تعيين ولذلك نضع $h(x)=(\tan(x))^{\tan(2x)}$ وعليه فإن نضع:

$$y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} h(x) \Rightarrow \ln y = \ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} h(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\ln h(x))$$

$$\therefore \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan(2x)\ln\tan(x)\right)=(\infty\cdot 0)$$ فيه عدم تعيين وعليه فإننا نضع:

باستخدام قاعدة لوبيتال نجد أن

$$\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\ln(\tan(x))}{\cot(2x)}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1/\tan(x))\sec^2(x)}{-2\operatorname{cosec}^2(2x)}=\frac{(2)}{(-2)}=-1$$

$$\therefore y=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} h(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan(x))^{\tan(2x)}=e^{-1}$$

#