جـــامعه بنـــــها
كلـيه الـــــعلوم
قسـم الرياضيات

الزمن: ساعتان
الترم الأول
٢٠١٥/ ٢٠١٦

إمتحان للفرقة الأولى كلية التربية قسم الفيزياء (رياضيات(١) جبر)
أجب عن الأسئلة الآتية

إجابة السؤال الأول:

آ- أثبت صحة العلاقة التالية بطريقة الاستنتاج الرياضي

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

عندما $n=1$

الطرف الأيسر $= 1^2 = 1$

الطرف الأيمن $= 3 \times 2 \times 1 \times 1/6 = 1$

∵ الطرفان متساويان

∴ العلاقة صحيحة عندما $n=1$.

نفرض صحة العلاقة (١) عندما $n=k$ (k عدد صحيح موجب) أى أن:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad \ldots\ldots (2)$$

بإضافة الحد الذى رتبته $(k+1)$ إلى الطرفين فى (2) نجد أن:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \qquad \ldots (3)$$

العلاقة (3) هى نفسها العلاقة (1) فيما لو عوضنا عن $n=k+1$.

∴ العلاقة (1) صحيحة لجميع قيم n العددية الصحيحة الموجبة.

إجابة السؤال الثاني:

أ-أوجد الكسور الجزئية لكل من :

$$(a)\ \frac{5x^2-3x+4}{(x+1)(x^2-2x+6)} \qquad (b)\ \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$$

الحل:

$$(a)\ \frac{5x^2-3x+4}{(x+1)(x^2-2x+6)} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2-2x+6}$$

بضرب (1) فى $(x + 1)(x^2 – 2x +6)$ نجد أن:

$$5x^2 – 3x + 4 = \alpha (x^2 – 2x + 6) + (\beta x + \gamma)(x + 1) \quad \ldots\ldots (2)$$

بوضع $x = –1$ فى (2) نجد أن:

$$5 + 3 + 4 = \alpha (1 + 2 + 6) \quad \rightarrow \quad 12 = 9\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

بمساواة معاملات x^2 فى الطرفين من (2) نجد أن:

$$5 = \alpha + \beta \quad \rightarrow \quad \beta = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15-4}{3} = \frac{11}{3}$$

بمساواة الحد المطلق فى (2) نجد أن:

$$4 = 6\alpha + \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = 4 - \frac{6\times 4}{3} = -4$$

بالتعويض عن γ, β, α فى (1) نجد أن:

$$\frac{5x^2-3x+4}{(x+1)(x^2-2x+6)} = \frac{4}{x+1} + \frac{11x-12}{3(x^2-2x+6)}$$

$$(b)\ \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(3x-2)}$$

$$5x+2 = A(3x-2) + B(x+2)$$
$$= (3A+B)x - 2A + 2B$$

بمقارنة المعاملات

$$3A+B=5, \quad -2A+2B=2$$

نجد ان

$$A=1, \quad B=2$$

ب- باستخدام نظرية ذات الحدين اوجد مفكوك

$$\frac{1}{(1-x^2)}$$

الحل:

$$\frac{1}{(1-x^2)} = (1-x^2)^{-1} = 1 + x^2 - x^4 + x^6 - \cdots$$

وفترة X التى يكون فيها المفكوك صحيح

$$\left|-x^2\right| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

إجابة السؤال الثالث:

أ- اذا كان:

$$(a+b) + i(a-b) = (1+i)^2 + i(2+i)$$

فاوجد قيمة a, b

الحل:

$$\begin{aligned}(a+b) + i(a-b) &= (1+i)^2 + i(2+i) \\ &= 1 + 2i - 1 + 2i - 1 \\ &= -1 + 4i\end{aligned}$$

بمساواة العدد التخيلى فلا الطرفين والعدد الحقيقى فى الطرفين

$$(a+b) = -1, (a-b) = 4$$

$$a = 3/2, b = -5/2$$

ب- اكتب العدد الاتى على الصورة المركبة $a + ib$

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{1}{1-2i}$$

الحل:

$$\frac{1}{2+3i} + \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} + \frac{1}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$$

$$\frac{1}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} + \frac{1}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2-3i}{13} + \frac{1+2i}{5}$$

$$= \frac{23}{65} + i\frac{11}{65}$$

جـــامعه بنـــــها
كلـيه الـــــعلوم
قسـم الرياضيات

الزمن: ساعتان
الترم الأول
٢٠١٥/ ٢٠١٦

السؤال الرابع:

حل نظام المعادلات الاتية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات

$$x+y+z=9,\ \ 2x-3y+2z=3, 3x+2y-3z=0$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}9\\ 3\\ 0\end{pmatrix},\ |A|=30\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 12 & -6 & 0\\ 13 & 1 & -5\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}60\\ 90\\ 120\end{pmatrix}$$

$$x=2,\ y=3, z=4$$

مع أطيب التمنيات
د/هبة السيد فتحى