الفرقة الاولي تربية تعليم أساسي – شعبة عربي
كلية التربية
الفصل الدراسى الاول 2015- 2016 م
تاريخ الامتحان: 14 / 1/ 2016

نموذج اجابة –نصف ورقة
المـــــادة: جبر (1)
اسم استاذ المادة: الدكتور/ عبدالحميد محمد عبدالحميد
– جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

جامعة بنها
كلية التربية
الفصل الدراسي الاول

المادة: أساسيات الرياضيات + جبر(1)
الفرقة: الاولي-تعليم اساسي عربي
الزمن: ساعتان

أولا الجبر

<u>اجب عن الأسئلة التالية:</u>

<u>السؤال الاول:</u>[50 درجة]

1 - باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

2- أوجد الكسور الجزئية للدالة الكسرية

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}$$

3- اذا كانت $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ فأثبت أن

$$\cos^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

<u>السؤال الثاني :</u> [50 درجة]

1- احسب قيمة العدد $(1+i\sqrt{3})^6$.

2- أوجد معكوس المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3- أوجد حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة كرامر

$$3x+2y+4z=19$$
$$2x-y+z=3$$
$$6x+7y-z=17$$

مع تمنياتي بالتوفيق د/ عبدالحميد ناجي

نموذج الاجابة

السؤال الاول:

-1

في حالة $n=1$ نجد أن

الطرف الايمن $= \frac{1}{2}$

الطرف الايسر $= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

الطرفان متساويان. إذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

نفرض صحة العلاقة عندما $n=k$ أي أن

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

ونحاول اثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}\,??$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\left[1-\frac{1}{2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\left[\frac{1}{2}\right]=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

-2

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x-4}$$

بضرب الطرفين في المقام $(x-1)(x^2+x-4)$ نحصل على

$$2=A(x^2+x-4)+(Bx+C)(x-1)$$

وللحصول على الثوابت نســـتخدم طريقـــة التعويض.

ونلاحظ أنه بالتعويض عن $x=1$ نحصل على معادلة في A فقط

$$2=A(1+1-4)\Rightarrow A=-1$$

وباستخدام طريقة مقارنة المعاملات نحصل على

$$2=x^2(A+B)+x(A-B+C)-4A-C$$

$$\therefore 2=A(1+1-4)\Rightarrow A=-1$$

$$0 = A + B = -1 + B \Rightarrow B = 1$$

وبالتالي يكون الناتج على الصورة

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x-4}$$

-3

$$\cos^4\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \frac{(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^4}{2^4}$$

$$= \frac{1}{16}\left[(e^{i\theta})^4 + 4(e^{-i\theta})(e^{i\theta})^3 + 6(e^{-i\theta})^2(e^{i\theta})^2 + 4(e^{-i\theta})^3(e^{i\theta}) + (e^{-i\theta})^4\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[e^{4i\theta} + 4e^{2i\theta} + 6 + 4e^{-2i\theta} + e^{-4i\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}}{2}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right] + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

<u>السؤال الثاني :</u>

1- بكتابة العدد $z = 1 + i\sqrt{3}$ في الصورة القطبية نجد أن

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

وبالتالي من نظرية دي موافر يكون المطلوب هو

$$z^6 = 2^6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6 = 2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$\therefore\ z^6 = 2^6$$

حيث أن

$$\cos 2\pi = 1 \quad , \quad \sin 2\pi = 0$$

2- اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=4+3=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

-3

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=3(-6)-2(-8)+4(20)=78\neq 0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 19 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 17 & 7 & -1 \end{vmatrix}=19\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 17 & -1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 17 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=19(-6)-2(-20)+4(38)=78$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 19 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 17 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 17 & -1 \end{vmatrix}-19\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 17 \end{vmatrix}$$

$$=3(-20)-19(-8)+4(16)=156$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 19 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 17 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 17 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 17 \end{vmatrix}+19\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=3(-38)-2(16)+19(20)=234$$

وباستخدام طريقة كرامر نجد أن

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{78}{78}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{156}{78}=2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{234}{78}=3$$