جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيـات

الفرقة الرابعة تربية عــام (رياضيات)

تخلفات من الفرقة الثالثة(لائحة قديمة)

الفصل الدراسي الأول

يوم الامتحان: الأربعاء 24/ 12 / 2014 م

المادة : تطبيقية (النظرية النسبية الخاصة)

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية	الفرقة الرابعة (لائحة قديمـة)	التاريخ: 2014/12/24
شعبة : الرياضيات	تخلفات من ثالثة تطبيقية (نسبيـة + متصلـة)	الزمن : ثلاث ساعات

==

ثانيا: النظرية النسبية الخاصة

أجب عن الأسئلة الآتية:

1-a	اذكر تجارب ألبرت اينشتاين الذهنية والتي استنتج منها نتائج جديدة في النظرية النسبية الخاصة ثم تكلم عن أحداهما بالتفصيل؟
1-b	سفينة فضاء تمر بالأرض وهي تسير بالسرعة الثابتة $(0.9c)$ وأرسل أليها إشارة ضوئية من الأرض بعد مرورها بثانية واحدة فقط . احسب الفترة الزمنية التي تصل فيها الإشارة الضوئية إلى سفينة الفضاء حسب أ – ساعات الأرض ب- ساعات السفينة ؟
2-a	إذا تحركت نقطة مادية فان متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد S هو $$\vec{u} = \hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z$$ ويكون متجه السرعة $\vec{u}'$ عند المشاهد S' هو $$\vec{u}' = \hat{i}u_{x'} + \hat{j}u_{y'} + \hat{k}u_{z'}$$ أوجد تحويلات لورنتز التي تربط بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u}'$ ؟
2-b	جسيم يتحرك بالسرعة u في اتجاه يصنع زاوية θ مع محور x عند المشاهد S . أوجد سرعة الجسيم u' والزاوية θ' التي يصنعها اتجاه الحركة مع محور x' عند S'؟
3	جسمين لهما نفس الكتلة الساكنة m_0 وأحدهما يتحرك بالسرعة $(0.6c)$ ليصطدم بالآخر وكونا جسيما واحدا. أوجد سرعة هذا الجسيم V وكتلته الساكنة M_0؟ ثم أعد حساباتك بالسرعة $(0.8c)$؟ حيث c تمثل سرعة الضوء في الفراغ.

انتهت الأسئلة

وتمنياتي لكم بالتوفيق

د. /خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

التجارب الذهنية

أ- الأطوال العرضية على الحركة **(Transverse Length).**

ب- الاسترخاء الزمني **Time Dilation**

ت- الانضغاط الطولي **Length contraction**

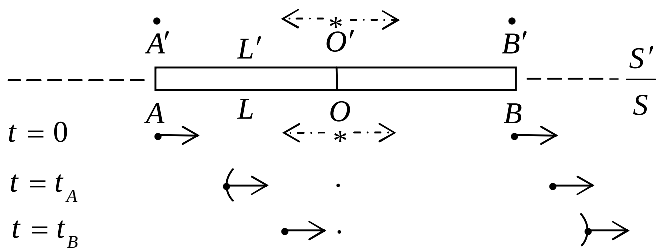
ث-عدم تزامن الساعات أثناء الحركة **Unsynchronization of moving clocks**

ج- الزمن الخصوصي والطول الخصوصي **Proper Time and Proper Length**

ثم نتكلم عن احدهما وليكن

عدم تزامن الساعات أثناء الحركة

Unsynchronization of moving clocks



إذا كانت ساعتان B', A' عند S' متزامنتان وموضوعتان عند طرفي L' وأرسلنا إشارتين ضوئيتين متزامنتين من النقطة O' في منتصف L' إلى كل من B', A' فإنهما تصلان متزامنتان عند هذين الطرفين . ولكن إذا بحثنا تزامن هاتين الساعتين وهما في حركة بالنسبة للمشاهد S فإننا نجد أن الإشارة الضوئية إلى اليسار تصل الطرف A في اللحظة $t=t_A$ وقبل أن تصل الإشارة الضوئية إلى اليمين للطرف B في اللحظة $t=t_B$ وبهذا فإن الساعة عند B تكون متأخرة عن الساعة عند A بالفارق الزمني

$$t = t_B - t_A$$

ومن الرسم نجد أن

$$ct_A = \frac{1}{2}L - vt_A \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{L}{2(c+v)}$$

$$ct_B = \frac{1}{2}L + vt_B \quad \Rightarrow \quad t_B = \frac{L}{2(c-v)}$$

$$\Delta t = \frac{L}{2(c-v)} - \frac{L}{2(c+v)} = \frac{Lv}{c^2 - v^2} = \frac{vL'\sqrt{1-v^2/c^2}}{c^2(1-v^2/c^2)}$$

$$= \frac{vL'}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{vL'}{c^2}$$

وهذه النتيجة تبين أن الساعات عند B', A' وهما متزامنتان فعلاً عند S' تبدوان غير ذلك عند S وتكون الساعة عند B' متأخرة عن تلك عند A' بالفارق $\frac{vL'}{c^2}$ بالمعدل المحلي عند S' وحيث L' هي المسافة الحقيقية الساكنة بين الساعتين .

إجابة السؤال 1-b:

إذا اعتبرنا وقت مرور السفينة بالأرض هو بداية قياس الزمن لساعات كل من الأرض والسفينة أي أن $t_\circ = 0 = t'_\circ$ وعندما أرسلت الإشارة الضوئية من الأرض سجلت تلك الساعات القراءات t_1, t'_1 وعندما وصلت أصبحت الساعات تسجل t_2, t'_2 وبذلك فإن الفترات الزمنية المطلوبة هي بالتحديد

أ- ساعات الأرض $t_2 - t_1$

ب- ساعات السفينة $t'_2 - t'_1$

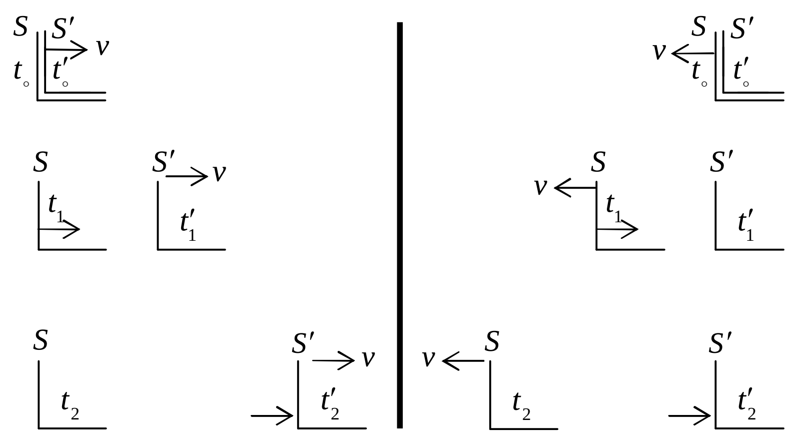
وسوف نوضح بالرسم أوضاع الأحداث الثلاثة وهي

1- مرور السفينة بالأرض

2- خروج الإشارة من الأرض

3- وصول الإشارة إلى السفينة

من وجهة نظر محاور الأرض وكذلك محاور السفينة حتى يتبين لنا ما هي الفترات الزمنية الخصوصية



ويتضح مباشرة أن الفترة الزمنية t_1 تكون خصوصية (proper) بالنسبة لمحاور الأرض والمناظرة لها تكون أطول t'_1

$$t_1 = t'_1\sqrt{1-\beta^2}$$

أما الفترة الزمنية t'_2 تكون خصوصية (proper) بالنسبة لمحاور السفينة والمناظرة لها تكون أطول

$$t'_2 = t_2\sqrt{1-\beta^2}$$

هذا في حين أن المسافة التي قطعتها السفينة في الفترة الزمنية t_2 قد قطعها الضوء في الفترة الزمنية $t_2 - t_1$

$$c(t_2 - t_1) = vt_2 \;\Rightarrow\; t_2 - t_1 = \beta t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{t_1}{1-\beta}$$

وبهذا فإن الفترة الزمنية التي تصل فيها الإشارة الضوئية إلى السفينة حسب ساعات الأرض هي

$$t_2 - t_1 = \frac{\beta}{1-\beta} t_1$$

أما بالنسبة لساعات سفينة الفضاء تكون الفترة الزمنية هي

$$t_2' - t_1' = t_2\sqrt{1-\beta^2} - \frac{t_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$= \left[\frac{1-\beta^2}{1-\beta} t_1 - t_1\right]\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} t_1$$

وإذا استخدمنا قيم $t_1 = 1\,\text{sec}\,,\ \beta = 0.9$ نجد الفترات الزمنية هي

$$t_2 - t_1 = \frac{0.9}{1-0.9} t_1 = 9\,t_1 = 9\,\text{sec}$$

$$t_2' - t_1' = \frac{0.9}{\sqrt{0.19}} t_1 = 2.1\,t_1 = 2.1\,\text{sec}$$

إجابة السؤال 2-a:

إذا تحركت نقطة مادية فإن متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد S هو

$$\vec{u} = u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j} + u_z\,\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

ويكون متجه السرعة $\vec{u'}$ عند المشاهد S' هو

$$\vec{u'} = u_{x'}\,\hat{i} + u_{y'}\,\hat{j} + u_{z'}\,\hat{k} = \frac{dx'}{dt'}\hat{i} + \frac{dy'}{dt'}\hat{j} + \frac{dz'}{dt'}\hat{k}$$

ومن معادلات تحويل لورنتز للإحداثيات يمكننا الآن إيجاد العلاقة بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ حيث نجد

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt) \qquad , \quad dy' = dy$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \quad , \quad dz' = dz$$

$$u_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - v\,dx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}$$

$$u_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} = \frac{u_y\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - v u_x/c^2}$$

وبما أن السرعة في اتجاه $x - x'$ فإنه يلاحظ أن المركبة $u_{z'}$ تعامل مثل المركبة $u_{y'}$ وأن u_x تظهر دائما في المقام وبهذا فإن معادلات تحويل لورنتز لمركبات السرعة هي

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \quad u_{y'} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}, \; u_{z'} = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

إجابة السؤال 2-b:

إن مركبات متجهي السرعة عند كل من S', S هي

$$u_x = u\cos\theta \quad , \quad u_y = u\sin\theta \quad , \quad u_z = 0$$

$$u_{x'} = u'\cos\theta' \quad , \quad u_{y'} = u'\sin\theta' \quad , \quad u_{z'} = 0$$

ومن معادلات تحويل لورنتز للسرعات نجد

$$u'\cos\theta' = \frac{u\cos\theta - v}{1 - \frac{v}{c^2} u\cos\theta}$$

$$u'\sin\theta' = \frac{u\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2} u\cos\theta} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\tan\theta' = \frac{u\sin\theta\sqrt{1-\beta^2}}{u\cos\theta - \beta c}$$

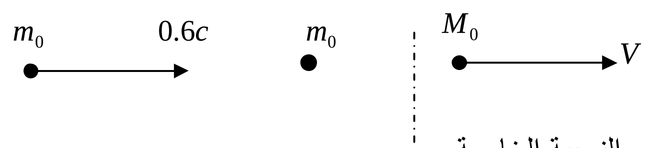
$$\left(1 - \frac{vu}{c^2}\cos\theta\right)^2 u'^2 = (u\cos\theta - v)^2 + u^2\sin^2\theta(1-\beta^2)$$

$$= u^2 - 2vu\cos\theta + v^2 - \beta^2 u^2 \sin^2\theta$$

$$u' = \frac{(u^2 - 2vu\cos\theta + v^2 - \beta^2 u^2\sin^2\theta)^{1/2}}{1 - \frac{vu}{c^2}\cos\theta}$$

$$\tan\theta' = \frac{u\sin\theta}{\gamma(u\cos\theta - v)}$$

إجابة السؤال 3:



من قانونى حفظ كميه الحركة والطاقة فى النسبية الخاصة

$$\frac{m_0(0.6c)}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = m_0 c . \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4} m_0 c = P \;\therefore\; \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(0.6)^2}} + m_0 c^2 = m_0 c^2 (\frac{1}{0.8} + 1) = \frac{9}{4} m_0 c^2 = E$$

$$V=\frac{c^2P}{E}=\frac{3}{4}.\frac{4}{9}c=\frac{1}{3}c$$

$$M_0^2=(\frac{E}{c})^2-(\frac{p}{c})^2=m_0^2[(\frac{9}{4})^2-(\frac{3}{4})^2]=\frac{6}{4}.\frac{12}{4}m_0^2 \qquad \therefore M_0^2=\frac{9}{2}m_0^2 \Rightarrow M_0=\frac{3}{\sqrt{2}}m_0$$

واذا كانت سرعة الجسيم الأول $0.8c$ نجد أن

$$P=m_0c.\frac{0.8}{0.6}=\frac{4}{3}m_0c, \qquad E=m_0c^2(\frac{1}{0.6}+1)=\frac{8}{3}m_0c^2$$

$$M_0^2=m_0^2[(\frac{8}{3})^2-(\frac{4}{3})^2]=\frac{4}{3}(4)m_0^2 \Rightarrow M_0=\frac{4}{\sqrt{3}}m_0$$

$$V=\frac{4}{3}.\frac{3}{8}c=\frac{1}{2}c$$

****