

جامعة بنها - كلية العلوم - قسم الرياضيات

الفرقة الرابعة تربية عام (رياضيات)

الفصل الدراسي الأول

يوم الامتحان: الأحد 28 / 12 / 2014 م

المادة : رياضيات تطبيقية (النظرية النسبية الخاصة- M414)

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان + نموذج إجابته



كلية : التربية
شعبة : الرياضيات
الفرقة الرابعة
التاريخ: 2014/12/28
رياضيات تطبيقية (نسبية + ديناميكا الموائع (1)) الزمن : ساعتين

النظرية النسبية الخاصة

أجب عن السؤالين التاليين:

1-a	اذكر تجارب ألبرت اينشتاين الذهنية والتي استنتج منها نتائج جديدة في النظرية النسبية الخاصة ثم وضح أن الطول الثابت L' عند المشاهد S' سوف يكون قياسه عند S هو الطول المتحرك L حيث $ L < L' $ إذا كانت الحركة موازية لهذا الطول؟
1-b	جسمين P, Q يتحركان على محور x بالنسبة للمشاهد S حسب القانونين $P : x = \frac{c}{a} \sqrt{c^2 + a^2 t^2}, \quad Q : x = \frac{c}{2} t + \frac{c^2}{a}$ وعلى ذلك فإنهما يتلاقيا في اللحظتين الزمنيةين $t = 0, T$. أحسب الفترة الزمنية بين تلاقيهما حسب كل من المشاهدين S, P, Q ؟
2-a	إذا تحركت نقطة مادية فان متجه السرعة \vec{u} لها عند المشاهد S هو $\vec{u} = \hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z$ ويكون متجه السرعة \vec{u}' عند المشاهد S' هو $\vec{u}' = \hat{i}'u_{x'} + \hat{j}'u_{y'} + \hat{k}'u_{z'}$ أوجد تحويلات لورنتز التي تربط بين مركبات كل من المتجهين \vec{u}, \vec{u}' ؟ كذلك استنتج من النتائج التي تحصل عليها التحويلات العكسية لتلك المركبات؟
2-b	اثبت أن قيمة الكتلة المتحركة m بالسرعة v تكون أكبر من قيمتها وهي ساكنة m_0 وأنها تتبع العلاقة $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ حيث c تمثل سرعة الضوء في الفراغ.

انتهت الأسئلة

وتمنيتي لكم بالتوفيق

د. / خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

التجارب الذهنية

أ- الأطوال العرضية على الحركة (Transverse Length).

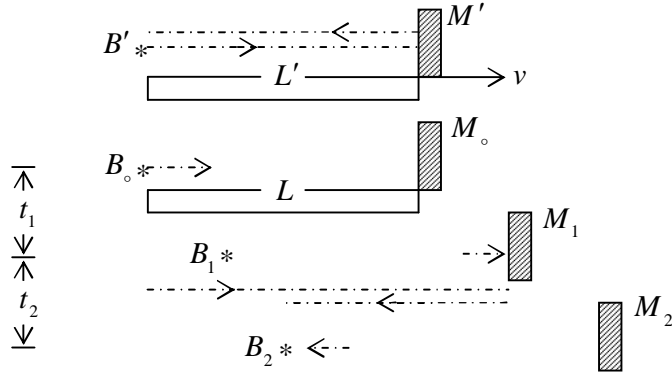
Time Dilation

Length contraction

ث- عدم تزامن الساعات أثناء الحركة Unsynchronization of moving clocks

ج- الزمن الخاصوي والطول الخاصوي Proper Time and Proper Length

ثم نتكلم عن تجربة الانضغاط الطولي حيث اعتبر أينشتين التجربة الذهنية الموضحة بالرسم كما يلي



وهنا نعتبر الطول L' ساكنا بالنسبة للمشاهد S' وبذلك فإنهما يتحركان بسرعة v بالنسبة للمشاهد S ويكون مقدار هذا الطول متحركاً على امتداد محور x هو L . وإذا وضعنا مرآة M' على الطرف الأيمن للطول L' وأرسلنا إشارة ضوئية من الطرف الآخر B' فإن الفترة الزمنية التي تلزم لذهاب الإشارة الضوئية إلى المرآة ثم الانعكاس والعودة إلى نقطة البداية هي $\Delta t' = 2L'/c$ ومن الواضح أن هذه الفترة الزمنية تكون بين حدثين واقعين في نفس المكان عند S' حيث خرجت الإشارة الضوئية من B' ثم عادت إلى نفس النقطة B' . وإذا بحثنا كيف يرى المشاهد S هذين الحدثين وبالطبع تكون الفترة الزمنية Δt بينهما حسب العلاقة

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1)$$

ومن الواضح أن الإشارة الضوئية تبدأ عند النقطة B_0 وتصل إلى

المرآة عند الوضع M_1 وليس M_0 ثم تنعكس وتعود لكي تصل إلى طرف البداية عند الوضع B_2 وذلك لأن الطول L متحرك أيضاً أثناء مسيرة الضوء، وهذا الطول L هو دائماً المسافة بين النقطتين M, B أي أن

$$L = B_0M_0 = B_1M_1 = B_2M_2$$

والآن يمكننا حساب الفترة الزمنية بين خروج الإشارة الضوئية وعودتها حيث أنها مجموع زمني رحلتي الذهاب والعودة وكما يتضح من الرسم

$$\Delta t = t_1 + t_2$$

$$B_0 M_1 = ct_1 = L + vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$M_1 B_2 = ct_2 = L - vt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{L}{c+v}$$

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) عن كل من $\Delta t'$, Δt نجد أذن

$$\frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{2L'}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة توضح أن الطول الثابت L' عند المشاهد S' سوف يكون قياسه عند S هو الطول المتحرك L ومقداره أقل من L' إذا كانت الحركة موازية لهذا الطول .

إجابة السؤال 1-b:

عندما يتلاقى الجسمين يكون موقعيهما على محور x واحداً أي عندما $x_p = x_0$ حيث نجد إذن

$$c^2 + a^2 t^2 = \left(\frac{a}{2} t + c \right)^2 = \frac{a^2 t^2}{4} + cat + c^2$$

$$\left(\frac{3}{4} at - c \right) at = 0 \Rightarrow t = 0 , \frac{4c}{3a}$$

ويتضح مباشرة أن الفترة الزمنية بين تلاقي الجسمين بالنسبة للمشاهد S هي $T = 4c/3a$. وحيث أن الجسم Q يتحرك بسرعة منتظمة $\dot{x}_0 = c/2$ فإن الفترة الزمنية T_0 حسب ساعات Q هي فترة خصوصية (proper) وقيمتها إذن

$$T_0 = T \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} T$$

أما بالنسبة لساعات P فإن سرعتها غير منتظمة حيث نجد $\dot{x}_p = \frac{cat}{\sqrt{c^2 + a^2 t^2}}$ ، ولكن إذا اعتبرنا العنصر التفاضلي dt بالنسبة للمشاهد S فإن نظيره العنصر التفاضلي dt_p بالنسبة للجسيم P تكون خصوصية (proper) وتصبح

$$dt_p = dt \sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}_p}{c} \right)^2} = \frac{c dt}{\sqrt{c^2 + a^2 t^2}}$$

وبذلك تكون الفترة الإجمالية T_p حسب ساعات P هي

$$T_p = \int_0^{T_p} dt_p = \int_0^T \frac{c dt}{\sqrt{c^2 + a^2 t^2}}$$

ولحساب هذا التكامل نستخدم التعويض

$$at = c \tan \theta \quad , \quad adt = c \sec^2 \theta d\theta$$

$$T_p = \frac{c}{a} \int_0^T \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{c}{a} \int_0^T \sec \theta d\theta$$

$$= \frac{c}{a} [\ln(\sec \theta + \tan \theta)]_0^T = \frac{c}{a} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 T^2}{c^2}} + \frac{aT}{c} \right]$$

$$= \frac{c}{a} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{16}{9}} + \frac{4}{3} \right] = \frac{c}{a} \ln 3$$

وبذلك فإن الفترات الزمنية المطلوبة للمشاهدين الثلاثة هي بالترتيب

$$S : T = \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{a}, \quad P : T_p = \frac{4}{3} \cdot \ln 3, \quad Q : T_Q = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{a}$$

إجابة السؤال 2-a:

إذا تحركت نقطة مادية فإن متجه السرعة \vec{u} لها عند المشاهد S هو

$$\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k}$$

ويكون متجه السرعة \vec{u}' عند المشاهد S' هو

$$\vec{u}' = u_{x'} \hat{i}' + u_{y'} \hat{j}' + u_{z'} \hat{k}' = \frac{dx'}{dt'} \hat{i}' + \frac{dy'}{dt'} \hat{j}' + \frac{dz'}{dt'} \hat{k}'$$

ومن معادلات تحويل لورنتز للإحداثيات يمكننا الآن إيجاد العلاقة بين مركبات كل من المتجهين \vec{u} ، \vec{u}' حيث نجد

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \quad , \quad dy' = dy$$

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \quad , \quad dz' = dz$$

$$u_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

$$u_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

وبما أن السرعة في اتجاه $x - x'$ فإنه يلاحظ أن المركبة $u_{z'}$ تعامل مثل المركبة u_y وأن u_x تظهر دائما في المقام وبهذا فإن معادلات تحويل لورنتز لمركبات السرعة هي

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{y'} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{z'} = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

وتحويل لورنتز العكسي للسرعات من المعادلة الأولى في نجد

$$u_{x'} \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) = u_x - v$$

$$u_{x'} + v = u_{x'} \frac{v}{c^2}u_x + u_x = \left(u_{x'} \frac{v}{c^2} + 1\right)u_x$$

$$\therefore u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}}$$

ومنها نجد

$$1 - \frac{v}{c^2}u_x = \frac{1}{1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}} \left[1 + \frac{v}{c^2}u_{x'} - \frac{v}{c^2}(u_{x'} + v)\right]$$

وينتج إذن

$$\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) \left(1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}\right) = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$$

ومن المعادلة الثانية نجد

$$u_y = u_{y'} \left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) \gamma = u_{y'} \frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}\right) \gamma}$$

إذن

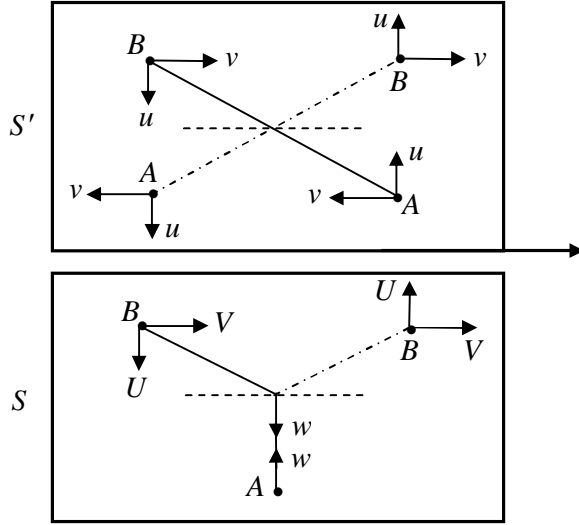
$$u_y = \frac{u_{y'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}}$$

$$u_z = \frac{u_{z'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u_{x'}}$$

وبالمثل

إجابة السؤال 2-b:

نعتبر الجسيمين B, A متماثلين تماما وكتلتهما واحدة وحركتهما في اتجاهين مضادين قبل وبعد التصادم بحيث تكون كمية الحركة الكلية لهما ساوي صفرا وذلك عند المشاهد S' الذي يحرك بسرعة v بالنسبة للمشاهد S وفي اتجاه عمودي على القوى الدفعية في التصادم التي هي في اتجاه y .



وإذا كانت هذه السرعة النسبية تساوي المركبة في اتجاه x لسرعة أحد الجسمين B فإن التصادم عند المشاهد S يبدو غير متماثل وبحيث تصبح حركة الجسم الآخر A في اتجاه y فقط . وبذلك تكون متجهات السرعات لكل من الجسمين قبل وبعد التصادم وعند كل من المشاهدين S', S كما يلي

	قبل التصادم	بعد التصادم
S' :	$\vec{v}_A = -v\hat{i} + u\hat{j}$	$\vec{v}_{A'} = -v\hat{i} - u\hat{j}$
	$\vec{v}_B = v\hat{i} + u\hat{j}$	$\vec{v}_{B'} = v\hat{i} + u\hat{j}$
S :	$\vec{v}_A = w\hat{j}$	$\vec{v}_{A'} = -w\hat{j}$
	$\vec{v}_B = v\hat{i} - u\hat{j}$	$\vec{v}_{B'} = v\hat{i} + u\hat{j}$

ويلاحظ ببساطة أن التصادم عند S هو نفسه الذي عند S' إذا أجرينا دورانين كل بزواوية π حول محور x ثم محور y مع تثبيت نقطة الصادم وإذا تم تبديل الجسمين مع بعضهما البعض . وعندما نستخدم معادلات تحويل لورنتز للسرعات نجد

$$u_y = \frac{u_{y'} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u_{x'}} \quad : \quad u = w \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

ومن قانون حفظ كمية الحركة في اتجاه y عند أي من المشاهدين S', S فإن

$$m(\sqrt{u^2 + v^2}) \cdot u = m(w) \cdot w$$

$$m(\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{m(w)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة تؤدي إلى نفس النتيجة السابقة عندما نجعل $w \rightarrow 0$ فإن $u \rightarrow 0$ وتصبح المعادلة

$$m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{إذ إن } m(v) \text{ أي انه إذا شوهد أي جسم يتحرك بالسرعة } v \text{ تكون}$$

كتلته $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ حيث m_0 هي كتلة الجسم عندما يكون ساكنا وذلك حتى نحافظ على قانون حفظ كمية الحركة .
