كلية تربية بنها الفرقة الرابعة رياضيات عام (نظام قديم) الفصل الأول٢٠١٥/٢٠١٤

قسم الرياضيات تخلف ميكانيكا الجسم المتماسك الزمن : ٣ ساعات

وميكانيكا تحليلية من ثالثه (نموذج اجابة) الأثنين :٢٠١٥/١٢/٢٢

أولا: جزء الجسم المتماسك (أجب عن الأسئلة التالية)(ملاحظه:- الدرجة الكلية موزعة بالتساوى)

١- تدور أنبوبة مستقيمة رفيعة ملساء بسرعة زاوية ثابتة ω فى مستوى رأسى حول محور أفقى ثابت عمودى على مستوى دورانها عند أحد طرفيها .اذا بدأت الأنبوبة حركتها عندما كانت أفقية وكان بداخلها نقطة مادية كتلتها m وتبعد مسافة a عن محور الدوران وتتحرك فى اتجاه محور الأنبوبة بعيدا عن محور الدوران بسرعة v_0 ،أوجد موضع النقطة المادية فى أى لحظة وكذلك رد فعل الأنبوبة على النقطة المادية فى أى لحظه .

٢- أ- أكتب بدون برهان معادلات الحركة لأويلر اذا كانت محاور الأسناد غير مثبته فى الفراغ وغير مثبته فى الجسم وتدور بسرعة زاوية $\vec{\Omega}$ والجسم يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}$.

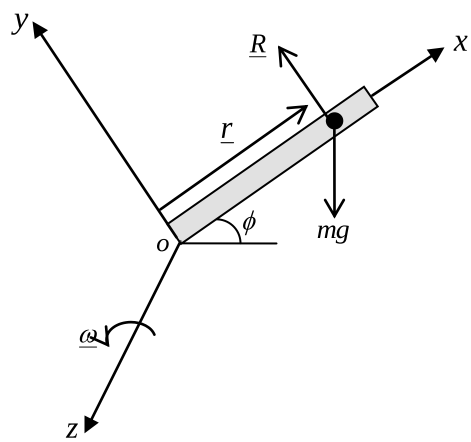
ب- تتحرك صفيحة خفيفة مستطيلة الشكل $ABCD$ طولها $\sqrt{2}$ عرضها حول نقطة o فى منتصف حافتها الطولية AD حركة دورانية بحتة .اذا بدأت الصفيحه حركتها بسرعة زاوية $\vec{\Omega}$ حول محور يقع فى المستوى العمودى على مستوى الصفيحة ويصنع زاوية 30^0 مع مستوى الصفيحة.أثبت أن مركبة متجه السرعة الزاوية للصفيحة فى اتجاه AD هى $\left(\sqrt{3}\,\frac{\dot{\Omega}}{2}\right)\tanh(\frac{\Omega t}{2})$ وأوجد المركبتين الأخرتين .

٣- أ-اكتب بدون برهان طاقة حركة جسم متماسك يتحرك حركة عامة. ب- تتكون نحلة من قرص دائرى كتلته $4m$ ونصف قطره a ومن قضيب رفيع مثبت عموديا على مستوى القرص عند مركز القرص كتلته m وطوله $3a$ ،اذا بدأت النحلة الحركة بحيث كان القضيب رأسيا والقرص لأعلى وكانت سرعة لف النحلة حول محورها هو $9\sqrt{\frac{5g}{a}}$.أثبت أن محور النحلة سوف يهبط حتى يصنع زاوية 60^o مع الرأسى (زاوية الهبوط) .

نموذج الأجابة(نصف ورقة)

اجابة السؤال الأول

<u>الحــل :</u>



بإختيار نقطة تقاطع محور الدوران مع الأنبوبه (النقطه الثابته في الفراغ) نقطة أصل o .مجموعة محاور الأسناد $oxyz$ مختاره بحيث ox ينطبق على محور الأنبوبه ومتجه الوحده $\hat{e}_1$ في اتجاه هذا المحور بعيداً عن نقطة الأصل o . oy عمودي على ox وفي المستوى الذي تدور فيه الأنبوبه ومتجه $\hat{e}_2$ في اتجاه هذا المحور (في الاتجاه الموجب للدوران)

oz محور الدوران ومتجه الوحده $\hat{e}_3$ في اتجــاه هذا المحــور وبحيث تكــون متجهات الوحده $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ مجموعه يمينيه.محاور الأسناد السابقة هي محاور غير قصوريه وتدور بسرعة زاويه $\underline{\omega}$ حيث

$$\underline{\omega} = \omega \hat{e}_3 = (0,0,\omega) \qquad \text{(i)}$$

بفرض أن النقطة الماديه تبعد مسافه r عن محور الدوران في اللحظة الزمنيه t فإن متجه موضع النقطة الماديه في هذه اللحظة يكون

$$\underline{r} = r\hat{e}_1 = (r,0,0) \quad \text{(ii)}$$

معادلة حركة النقطة الماديه

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad (1)$$

القوى المؤثرة على النقطة الماديه

وزن النقطة الماديه mg ورد فعل الأنبوبه $\underline{R}$ (حيث أن الأنبوبه ملساء فإن اتجاه $\underline{R}$ يكون عمودياً على اتجاه محورها)

$$\underline{F} \equiv (-mg\sin\phi\,,\, R - mg\cos\phi\,,\, 0) \quad \text{(iii)}$$

حيث ϕ الزاويه التي يصنعها محور الانبوبه مع الافقي في اللحظه الزمنيه t. وحيث أن الأنبوبه بدأت حركتها من وضع افقي وتدور بسرعة زاويه ثابته $\underline{\omega}$ فإن

$$\phi = \omega t \quad \text{(iv)}$$

متجه عجلة النقطة الماديه

$$\ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{e}_1 + 2\omega\dot{r}\hat{e}_2 \quad \text{(v)}$$

من (iv),(1),(iii),(v) نجد أن

$$\ddot{r} - r\omega^2 + g\sin\omega t = 0 \quad (2)$$

$$2m\omega\dot{r} + mg\cos\omega t = R \quad (3)$$

الحل العام للمعادله (2) وبإستخدام الشروط الابتدائيه $t = 0 \quad \Rightarrow \quad r = a \quad , \quad \dot{r} = v_\circ$

هو

$$r = a\cosh\omega t + \left(\frac{v_{\circ}}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\sinh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$R = 2ma\omega^2 \sinh\omega t + m(2\omega v_{\circ} - g)\cosh\omega t + 2mg\cos\omega t \qquad (5)$$

العلاقتان (4),(iv) تحددان موضع النقطه الماديه في أيه لحظه زمنيه t والعلاقة (5) تعين رد فعل الأنبوبـه على النقطه الماديه في هذه اللحظه .

اجابة السؤال الثانى

أ- معادلات الحركة في هذه الحالة هي : **إذا كانت** $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ **غير مثبتة في الفراغ وغير مثبتة في الجسم**

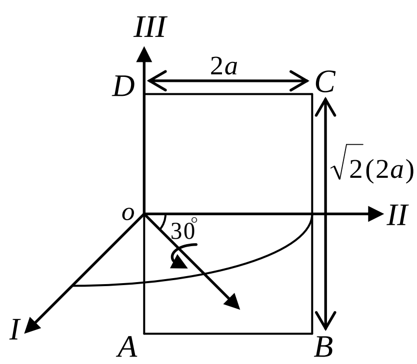
$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 - I_2\omega_2 r_3 + I_3\omega_3 r_2 &= M_1 \\
I_2\dot{\omega}_2 - I_3\omega_3 r_1 + I_1\omega_1 r_3 &= M_2 \\
I_3\dot{\omega}_3 - I_1\omega_1 r_2 + I_2\omega_2 r_1 &= M_3
\end{aligned}$$

بوضع Ω بدلامن r

ب- الحــل :

بوضع السرعة الزاوية

$\vec{\Omega}$ بدلامن r فى المسألة



بأخذ نقطة الدوران الثابتة o نقطة أصل .مجموعة المحاور هي المحوران II, III يقعان في مستوى الصفيحة كما هو مبين بالشكل ، المحور I عمودي على مستوى الصفيحة . هذه المحاور هي مجموعة محاور قصور ذاتي رئيسية للفصور عند o .هذه المجموعة مثبته في الجسم .

نفرض أن كتلة الصفيحة m وعرضها $2a$ وطولها $2\sqrt{2}a$ بذلك يكون

$$I_1 = 2ma^2 \quad , \quad I_2 = \frac{1}{3}(2ma^2) \quad , \quad I_3 = \frac{4}{3}(ma^2)$$

بفرض أن $\underline{\omega} = (\omega_1 , \omega_2 , \omega_3)$ هو متجه السرعة الزاوية للصفيحة .

معادلات أويلر للحركة (الجسم خفيف)

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

بالتعويض عن قيم I_1, I_2, I_3 نحصل على

$$3\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 = 0 \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 = 0 \tag{3}$$

من (3) في (1) نجد أن

$$3\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_3\omega_3 = 0$$

بإجراء التكامل على المعادلة الأخيرة واستخدام الشروط الابتدائية وهي عند $t = 0$ كانت $\underline{\omega} = \underline{r}$ حيث $\underline{r} = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} r, 0\right)$ نحصل على

$$3\omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} \tag{4}$$

وكذلك من (3),(2) وإجراء التكامل واستخدام الشروط الابتدائية نجد ان

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} \tag{5}$$

من (5),(4),(3) نحصل على

$$\dot{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2\right)}$$

$$\int_0^{\omega_3} \frac{d\omega_3}{\frac{3r^2}{4} - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\int_0^t dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\,r}\tanh^{-1}\frac{2\omega_3}{\sqrt{3}\,r} = \sqrt{\frac{1}{3}}\,t$$

ومنها

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\tanh\left(\frac{rt}{2}\right) \tag{6}$$

من (6),(4) نحصل على

$$\omega_1 = \frac{r}{2}\operatorname{sec}h\left(\frac{rt}{2}\right) \tag{7}$$

من (6),(5)

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}\,r}{2}\operatorname{sec}h\left(\frac{rt}{2}\right) \tag{8}$$

اجابة السؤال الثالث

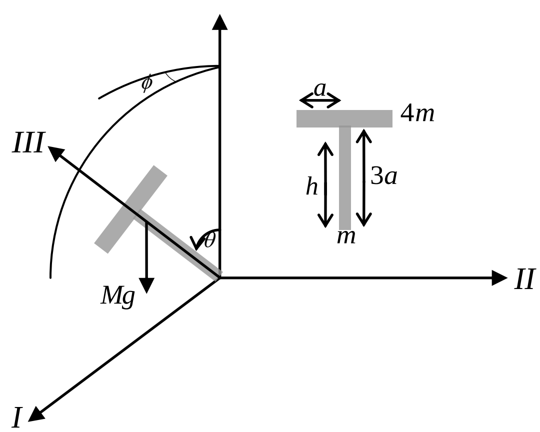
أ- طاقة حركة جسم متماسك يتحرك حركة عامة تساوي مجموع طاقتي الحركة

<u>الأولى :</u> طاقة حركة نقطة مادية كتلتها تساوي كتلة الجسم كله وتتحرك بسرعة مركز كتلة الجسم أي طاقة الحركة الانتقالية .

<u>الثانية :</u> طاقة حركة الجسم في حركته الدورانية حول مركز الكتلة .

$$T = \frac{1}{2} m \underline{v}^2 + \frac{1}{2} \underline{H_C} \cdot \underline{\omega}$$

<u>ب- الحــل :</u>



نفرض أن M كتلة النحله ، h بعد مركو كتلة النحله عن سنها .

$$M = 5m \quad , \quad h = \left(\frac{27}{10}\right) a$$

$$I = 40ma^2 \quad , \quad I^* = 2ma^2 \qquad (1)$$

<u>زوايا الصعود والهبوط للنحله :</u>

هي الجذور الحقيقيه للمعادلة

$$(H - SI^{*}\cos\theta)^2 + I(2mgh\cos\theta - K)(1-\cos^2\theta) = 0 \tag{I}$$

لتعيين ثوابت الحركة S, H, K نستخدم الشروط الابتدائية للحركة.النحله بدأت الحركة عند $\theta = 0\,,\,\dot{\theta} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة (5)، (6) نجد أن

$$H = SI^{*} \quad , \quad S = 9\sqrt{5g/a} \quad , \quad I^{*} = 2ma^2 \tag{2}$$

$$H = 18ma\sqrt{5ga} \tag{3}$$

$$K = 2Mgh = 27mga \tag{4}$$

بالتعويض من 1,2,3,4 في I نجد أن

$$(1-\cos^2\theta)(1-2\cos\theta) = 0$$

جذور المعادلة هي

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

وهي زاوية تمايل محور النحله على الرأسي عند بداية الحركة (زاوية الصعود). جذر آخر للمعادلة هو

$$2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^{\circ}$$

وهي زاوية هبوط النحله على الرأسي .

مع اطيب تمنياتى بالتوفيق

أ.د.محمود عبد العاطى محمود