إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة كلية التربية أساسي شعبة : رياضيات المادة : الإحصاء

يوم الأمتحان :الاحد ٢٨/ ١٢ / ٢٠١٤ م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

السؤال الأول

Y \ X	١	2	٣	$q(y_j)$
0	0.05	0.10	0.15	0.30
1	0.08	0.15	0.10	0.33
2	0.20	0.12	0.05	0.37
$p(x_i)$	0.33	0.37	0.30	1

X	1	2	3	Σ
$p(x_i)$	0.33	0.37	0.30	1

Y	٠	1	2	Σ
$q(y_j)$	٠.٣٠	0.33	0.37	1

أ .

$$P[X>Y]=P[X=1,Y=0]+P[X=2,Y=0]+P[X=2,Y=1]+P[X=3,Y=0]$$
$$+P[X=3,Y=1]++P[X=3,Y=2]$$
$$=0.05+0.10+0.15+0.15+0.10+0.05=0.6$$
$$P[X\geq 2]=P[X=2]+P[X=4]=0.3+0.3=0.6$$

ب . لإيجاد متوسط عدد الآفات التي تصيب النخلة من الحشرة A بشرط أن يكون عدد الآفات المصابة بالحشرة B هو 2 آفة **يجب حساب** دالة الكثافة المشروطة للمتغير X بشرط أن Y=2

X	1	2	3	Σ
$p(x_i/Y=2)$	20/37	12/37	5/37	1

$$\mu_{X/Y=2}=(1)(20/37)+(2)(12/37)+(3)(5/37)=59/37$$

جـ . معامل الأرتباط

$$\mu_X = (1)(0.33)+(2)(0.37)+(3)(0.30)=1.97$$
$$E[X^2]=(1)^2(0.33)+(2)^2(0.37)+(3)^2(0.30)=4.51$$
$$\sigma^2{}_X = E[X^2]-[\mu_X]^2 = 4.51-(1.97) \ = 0.6291 \rightarrow \sigma_X = 0.79$$
$$\mu_Y = (0)(0.30)+(1)(0.33)+(2)(0.37)=1.07$$
$$E[Y^2]=(0)^2(0.30)+(1)^2(0.33)+(2)^2(0.37)=1.81$$
$$\sigma^2{}_Y = E[Y^2]-[\mu_Y]^2 = 1.81-(1.07)^2 = 1.81-1.14=0.67 \rightarrow \sigma_Y = 0.82$$

ومن جدول التوزيع المشترك يمكن حساب $\mathbf{E[XY]}$ كالتالي :

$$E[XY]=(1\times 0)(0.05)+(2\times 0)(0.10)+(3\times 0)(0.15)+(1\times 1)(0.08)+(2\times 1)(0.15)+(3\times 1)(0.10)$$
$$+(1\times 2)(0.20)+(2\times 2)(0.12)+(3\times 2)(0.05)=1.86$$
$$\therefore Cov[X,Y]=E[XY]-\mu_X\mu_Y = 1.86-1.97\times 1.07 = 1.86-2.1079=-0.2479$$

وبالتالي فإن :

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-0.2479}{(0.79)(0.82)}=-0.38$$

د . **التوزيع الاحتمالي للمتغير T**

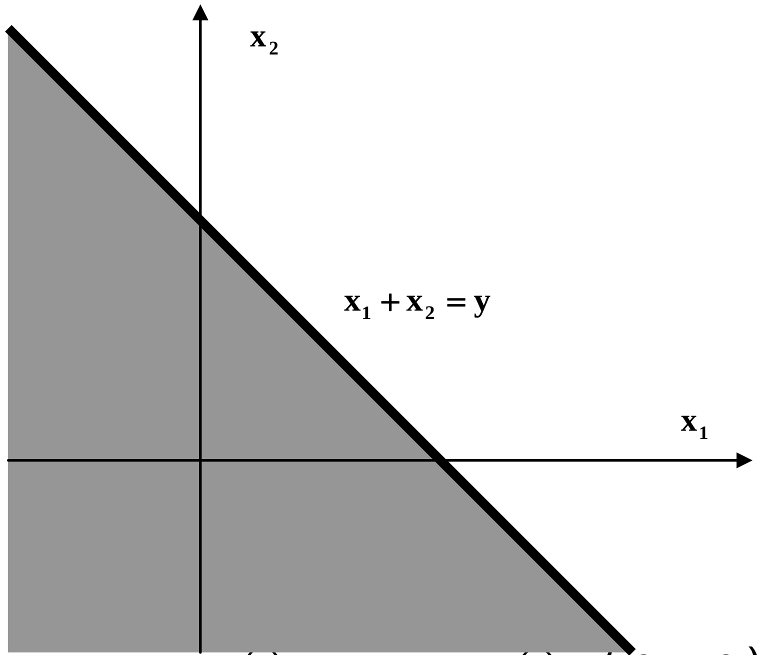
T	1	2	3	4	5	Σ
$p(t_i)$	0.05	0.18	0.50	0.22	0.05	1

$$\mu_T = (1)(0.05)+(2)(0.18)+(3)(0.50)+(4)(0.22)+5(0.05)=3.04$$
$$E(T^2)=(1)^2(0.05)+(2)^2(0.18)+(3)^2(0.50)+(4)^2(0.22)+(5)^2(0.05)=10.04$$
$$\sigma^2(T)=E(T^2)-\mu_T{}^2 = 10.04-(3.04)^2 = 0.8$$

<u>السؤال الثاني : أ</u>

بإيجاد التكامل لدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغير العشوائي $\mathbf{X_1, X_2}$ علي المنطقة المهشرة نحصل علي

$$\mathbf{F(y)=\int_0^{y}\int_0^{y-x_2} 6e^{-3x_1-2x_2}\,dx_1 dx_2}$$
$$\mathbf{=1+2e^{-3y}-3e^{-2y}}$$



وبالتفاضل بالنسبة إلى $\mathbf{y}$ نجد أن $\mathbf{f(y)=6(e^{-2y}-e^{-3y})}$ لكل $\mathbf{y>0}$ ، $\mathbf{f(y)=0}$ بخلاف ذلك .

السؤال الثاني : ب

باستخدام توزيع ذو الحدين ببار مترات $n=4, \theta = p = \frac{1}{2}$ نجد أن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

وباستخدام العلاقة $y = \frac{1}{1+x}$ لإيجاد قيم y وذلك بالتعويض عن قيم x نجد أن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y هو

y	1	1/2	1/3	1/4	1/5
g(y)	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

إذا أردنا أن نعوض مباشرة في علاقة التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذو الحدين ببار مترات $n=4, \theta = p = \frac{1}{2}$ نجد أننا يجب أن نعوض عن $x = \frac{1}{y} - 1$ لقيم x في العلاقة

$$f(x) = C_x^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad \text{for} \qquad x = 0,1,2,3,4$$

نحصل علي

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y} - 1\right) = C_{\frac{1}{y}-1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \qquad \text{for} \qquad y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

السؤال الثالث : أ

عند درجة ثقة95% اي ان $1-\alpha = 0.95$ نجد أن $\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.025$ ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ وبالتالى فأن

$$n = 500, r = \frac{100}{500} = 0.2$$

$$r - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{r(1-r)}}{\sqrt{n}} < R < r + z_{\frac{\alpha}{2}2} \frac{\sqrt{r(1-r)}}{\sqrt{n}}$$

$$0.2 - 1.96 \times \frac{\sqrt{0.2 \times (1-.02)}}{\sqrt{500}} < R < 0.2 - 1.96 \times \frac{\sqrt{0.2 \times (1-.02)}}{\sqrt{500}}$$

$$0.165 < R < 0.235$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هي (0.165 , 0.235)

السؤال الثالث : ب

خصائص التقدير الجيد

أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator

نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو θ هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها n ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ لتقدير للبارامتر θ التقدير $\hat{\theta}$ ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة n ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي $\hat{\theta}$ بانه تقدير غير متحيز للبارمتر θ إذا كان $E\,\hat{\theta} = \theta$

د . الأتساق Consistency

الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها n ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى θ وأن التقدير من العينة هو $\hat{\theta}$ وبالتالى يقال أن : التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر θ عن طريق الاحتمال أى أن

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta-\hat{\theta}\right| \geq c\right) \to 1$$

حيث c مقدار اختيارى موجب $c > 0$.

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا متسقا للبارمتر θ إذا كان :

١. $\hat{\theta}$ تقديرا غير متحيزا للبارمتر θ

٢. $\lim_{n\to\infty} \sigma^2\left(\hat{\theta}\right) \to 0$

هـ الكفاية : Sufficiency

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر θ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر

θ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر θ ، أى أن

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta\right) = g\left(\theta, \hat{\theta}\right) h\left(x_1, x_2, \ldots, x ; \hat{\theta}\right)$$

$$\overline{X} = \frac{1}{3}\left(X_1 + X_2 + X_3\right) \quad , \quad \overline{Y} = \frac{1}{6}\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right)$$

$$E\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{3}E\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = \frac{1}{3}\left(\mu + \mu + \mu\right) = \mu$$

$$E\left(\overline{Y}\right) = \frac{1}{6}E\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right) = \frac{1}{3}\left(\mu + 2\mu + 3\mu\right) = \mu$$

أي أن كلا التقديرين تقدير غير متحيز للبارمتر μ.

للمقارنة بين التباينين لكل من التقديرين و معرفة أيهما أفضل نحسب تباين كل منهما

$$\sigma^2\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{9}\sigma^2\left(X_1 + X_2 + X_3\right) = \frac{1}{9}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2\right) = \frac{1}{3}\sigma^2 = \frac{6}{18}\sigma^2$$

$$\sigma^2\left(\overline{Y}\right) = \frac{1}{36}\sigma^2\left(X_1 + 2X_2 + 3X_3\right) = \frac{1}{36}\left(\sigma^2 + 4\sigma^2\mu + 9\sigma^2\right) = \frac{14}{36}\sigma^2 = \frac{7}{18}\sigma^2$$

أي ان تشتت $\overline{X}$ أقل من $\overline{Y}$ وبالتالي $\overline{X}$ أفضل .

اجابة السؤال الرابع (أ) :

هذا المجتمع له الدالة الاحتمالية

X	٢	٤	٦	٨
$f(X)$	1/4	1/4	1/4	1/4

يتضح أن هذا التوزيع ليس معتدلا بل يطلق عليه التوزيع المنتظم ويمكن حساب المتوسط والتباين ونجد أن

$\sigma^2 = 5; \mu = 5$

الآن نريد سحب عينة من حجم 2 ثم نوجد التوزيع العينى على أن يكون السحب بإرجاع فى هذه الحالة نجد أن عدد العينات الممكنة هى $4^2 = 16$ وهى كالتالى :

$$\begin{gathered}(2,2),(2,4),(2,6),(2,8)\\(4,2),(4,4),(4,6),(4,8)\\(6,2),(6,4),(6,6),(6,8)\\(8,2),(8,4),(8,6),(8,8)\end{gathered}$$

احتمال سحب عينة من هذه العينات هى 1/16 ويكون التوزيع العينى هو :

$\overline{X}$	2	3	4	5	6	7	8
$P(\overline{X})$	1/16	2/16	3/16	4/16	3/16	2/16	1/16

وبرسم هذا التوزيع نجد أنه يأخذ تقريبا شكل التوزيع المعتدل

$$E\overline{X} = 2\times\frac{1}{16} + 3\times\frac{2}{16} + 4\times\frac{3}{16} + 5\times\frac{4}{16} + 6\times\frac{3}{16} + 7\times\frac{2}{16} + 8\times\frac{1}{16} = 5$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\overline{X}} &= 2^2\times\frac{1}{16} + 3^2\times\frac{2}{16} + 4^2\times\frac{3}{16} + 5^2\times\frac{4}{16} + 6^2\times\frac{3}{16} + 7^2\times\frac{2}{16} + 8^2\times\frac{1}{16} - 5^2\\ &= 27.5 - 25 = 2.5\end{aligned}$$

ونجد أن :

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}, E\overline{X} = \mu$$

إجابة السؤال الرابع (ب) :

دالة الترجيح هى :

$$\begin{aligned}L(\mu,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

وبالتالى فأن

$$\begin{aligned}\ln L(\mu,\sigma^2) &= -n\ln\sigma - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\\ &= -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - n\ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\end{aligned}$$

ولإيجاد قيم μ , σ^2 التى تجعل هذه الدالة نهاية عظمى فإننا نفاضل هذه الدالة جزئيا مرة بالنسبة إلى μ وآخرى بالنسبة إلى σ^2 ومساواتهم بالصفر أى أن

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)\right]=0, \qquad \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)\right]$$

وبالتالى فأن

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)\right]=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}2\left(x_i-\mu\right)\left(-1\right)=0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)=0,\sigma^2\neq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\mu$$

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

وكذلك بالنسبة للتباين :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[\ln L\left(\mu,\sigma^2\right)\right]=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2=0$$

$$\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$$

أى أن $\bar{x}$ هو تقدير للمتوسط μ & $\hat{\sigma}^2$ هو تقدير للتباين σ^2 ويلاحظ أننا استبدلنا μ بالقيمة المقدرة لها $\bar{x}$ وذلك لأنه لايمكن إيجاد تقدير $\hat{\sigma}^2$ بمعلومية قيمة μ المجهولة أصلا .