إجابة أمتحان

الفرقة الرابعة تربية أساسي (لائحة قديمة): شعبة رياضيات المادة : الإحصاء

يوم الأمتحان :الثلاثاء ٣٠ / ١٢ / ٢٠١٤ م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

السؤال الأول

يمكن إيجاد دالة الكثافة الهامشية لكل منهما وهي

$$f(x)=\int_0^1 4xydy=2x \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

$$g(y)=\int_0^2 4xydx=2y \quad ; \quad 0\le y\le 1$$

$$E[X]=\mu_X=\int xf(x)dx=\int_0^1 x\times 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E[Y]=\mu_Y=\int yg(y)dy=\int_0^1 2y\times ydy=\frac{2}{3}$$

$$E[X^2]=\int x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\times 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$E[Y^2]=\int y^2 g(y)dy=\int_0^1 y^2\times 2ydy=\frac{1}{2}$$

$$Var[X]=\sigma_X^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$Var[Y]=\sigma_Y^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$E[XY]=\int\int xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy\times 4xydxdy=\frac{4}{9}$$

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{4}{9}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=0$$

$$\rho[X,Y]=\frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{0}{\sqrt{\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}}}=0$$

$$P(0<X<0.4;0.5<Y<0.8)=\int_0^{0.4}dx\int_{0.5}^{0.8}4xydy=\left[x^2\right]_0^{0.4}\left[y^2\right]_{0.5}^{0.8}=0.0624$$

$$P(0.2<X<0.61)=\int_{0.2}^{0.6}f(x)dx=\int_{0.2}^{0.6}2xdx=0.32$$

السؤال الثاني

إذا كانت $G(y)$ ترمز إلي دالة التوزيع التراكمية للمتغير Y عند النقطة y . فإن

$$
\begin{aligned}
G(y) &= P(Y \le y) \\
&= P\left(X^3 \le y\right) \\
&= P\left(X \le y^{1/3}\right) \\
&= \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} \frac{3}{8} x^2 dx \\
&= \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{8} y
\end{aligned}
$$

وبالتالي فإن $g(y) = \frac{1}{8}$ **لكل** $0 < y < 8$ ، $\mathbf{g(y) = 0}$ **بخلاف ذلك .**

وهي دالة كثافة لمتغير متصل منتظم علي الفترة [0,8] ويكون التوقع لهذا التوزيع $\mathbf{EX = \frac{b+a}{2} = \frac{8+0}{2} = 4}$ **والتباين هو**

$$\mathbf{\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}}$$

السؤال الثالث

خصائص التقدير الجيد

أ . التقدير غير المتميز : Unbiased estimator

نعتبر مجتمع معين أحد معالمه " بارامتر " هو θ **هذا المجتمع أخذنا عينة عشوائية واحدة حجمها** n **ومنها أمكن تعين التقدير الإحصائي** $\hat{\theta}$ **لتقدير للبارامتر** θ **التقدير** $\hat{\theta}$ **ماهو الا متغير عشوائى يتغير من عينة إلى أخرى علما بأن حجم العينة** n **ثابت .يقال أن التقدير الإحصائي** $\hat{\theta}$ **بانه تقدير غير متحيز للبارمتر** θ **إذا كان** $E\hat{\theta} = \theta$

د . الأتساق Consistency

الخاصية الثانية التى يجب أن تتوافر حتى نقول أن التقدير جيدا هو الأتساق .

نفرض أن لدينا مجتمع حجمه N **وسحبنا منه عينة عشوائية حجمها** n **ونفرض أن معلمة المجتمع المجهولة هى** θ **وأن التقدير من العينة هو** $\hat{\theta}$ **وبالتالى يقال أن : التقدير** $\hat{\theta}$ **تقديرا متسقا للبارمتر** θ **إذا تقارب هذا التقدير للبارمتر** θ **عن طريق الاحتمال أى أن**

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\theta - \hat{\theta}\right| \ge c\right) \to 1$$

حيث c **مقدار اختيارى موجب** $c > 0$.

وا لتعرف السابق مكافىء إلى أن يكون يسمى التقدير $\hat{\theta}$ **تقديرا متسقا للبارمتر** θ **إذا كان :**

١. $\hat{\theta}$ **تقديرا غير متحيزا للبارمتر** θ

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2\left(\hat{\theta}\right)\to 0$$. ٢

هـ الكفاية : Sufficiency

التقدير $\hat{\theta}$ تقديرا كاف للبارمتر θ لأى مجتمع إذا أمكن التعبير عن دالة الكثافة

الاحتمالية المشتركة لمفردات العينة كحاصل ضرب دالتين احدهما تعتمد فقط على البارمتر

θ والتقدير $\hat{\theta}$ والآخرى لاتعتمد على البارمتر θ . أى أن

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta\right) = g\left(\theta, \hat{\theta}\right) h\left(x_1, x_2, \ldots, x; \hat{\theta}\right)$$

$$\bar{X}=\frac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right) \quad , \quad \bar{Y}=\frac{1}{6}\left(X_1+2X_2+3X_3\right)$$

$$E\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{3}E\left(X_1+X_2+X_3\right)=\frac{1}{3}\left(\mu+\mu+\mu\right)=\mu$$

$$E\left(\bar{Y}\right)=\frac{1}{6}E\left(X_1+2X_2+3X_3\right)=\frac{1}{3}\left(\mu+2\mu+3\mu\right)=\mu$$

أي أن كلا التقديرين تقدير غير متحيز للبارمتر μ .

للمقارنة بين التباينين لكل من التقديرين و معرفة أيهما أفضل نحسب تباين كل منهما

$$\sigma^2\left(\bar{X}\right)=\frac{1}{9}\sigma^2\left(X_1+X_2+X_3\right)=\frac{1}{9}\left(\sigma^2+\sigma^2+\sigma^2\right)=\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{6}{18}\sigma^2$$

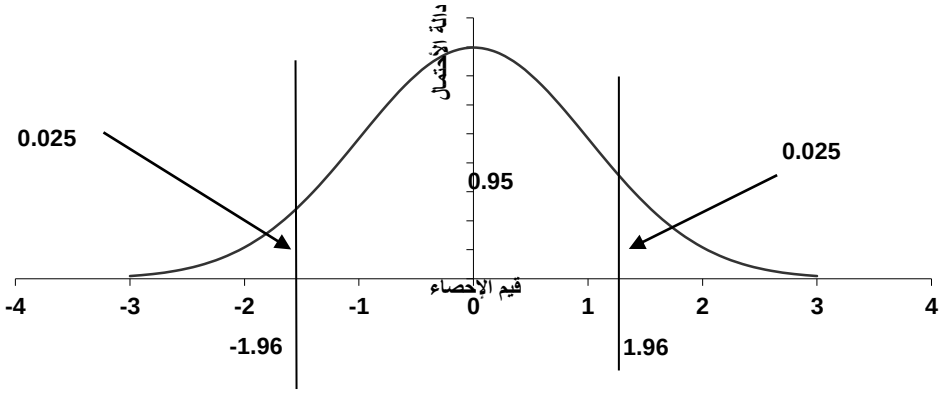
$$\sigma^2\left(\bar{Y}\right)=\frac{1}{36}\sigma^2\left(X_1+2X_2+3X_3\right)=\frac{1}{36}\left(\sigma^2+4\sigma^2\mu+9\sigma^2\right)=\frac{14}{36}\sigma^2=\frac{7}{18}\sigma^2$$

أي ان تشتت $\bar{X}$ أقل من $\bar{Y}$ وبالتالي $\bar{X}$ أفضل .

السؤال الرابع : أ .

في حالة ما يكون التباين للمجتمع معلوم ويساوي 4

عند درجة ثقة95% اي ان $1-\alpha=0.95$ نجد أن $\alpha=0.05, \frac{\alpha}{2}=0.025$ ومن الجداول نجد أن $z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ وبالتالى فأن



$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$23.5 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}} < \mu < 23.5 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$22.52 < \mu < 24.48$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 95% هى $(22.52, 24.48)$.

في حالة ما يكون التباين للمجتمع مجهول وتباين العينة معلوم ويساوي 5

عند درجة ثقة 99% اي ان $1-\alpha = 0.99$ **نجد أن** $\alpha = 0.05, \frac{\alpha}{2} = 0.005$ **ومن الجداول نجد أن** $t_{(0.005,15)} = 2.974$

$$\bar{x} - t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{(n-1),\frac{\alpha}{2}} . \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$23.5 - 2.974 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} < \mu < 23.5 + 2.974 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}$$

$$22.94 < \mu < 24.06$$

أي أن فترة الثقة المناظرة لمستوى ثقة 99% **هى** $(22.94, 24.06)$.

السؤال الرابع : ب .

نسبة المشاهدين لهذا البرنامج فى العينة $r = \frac{190}{250} = 0.76$ **حجم العينة n=250**

وبالتالى فأن :

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

وحيث أن p مجهولة لذلك نستخدم النسبة r بدلا من p

$$\sigma(r) = \sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} = \sqrt{\frac{0.76 \times (1-0.76)}{250}} = 0.027$$

وبالتالى فأن

$$P[0.76 - 1.96 \times 0.027 \le p \le 0.76 + 1.96 \times 0.027] = 0.95$$

أى أن

$$P(0.707 \le p \le 0.813) = 0.95$$

أى أننا نتوقع أن p تقع بين 0.813 & 0.707 وذلك بمستوى ثقة 95% .