جامعة بنها – كلية التربية – قسم الرياضيات

الفرقة: الرابعة عام رياضة تخلف من الفرقة الثالثة

يوم الامتحان: ٢٢ / ١٢ / ٢٠١٤ م

المادة : ديناميكا تحليلية

الممتحن: د . / أحمد مصطفي عبدالباقي مجاهد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

نصف ورقـــة

إجابة السؤال الاول:

أ) نوجد أولاً: دالة لاجرانج $L = T - U = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (q_1 - q_2)^2$، من معادلات لاجرانج للحركة

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_s}, \quad s = 1,2$$

عندما $s = 1$ يكون لدينا

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\dot{q}_1) + 2q_1 = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{q}_1 + 2q_1 = 0 \qquad (١)$$

عندما $s = 2$ يكون لدينا

$$(2)\;\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(\dot{q}_2) + 2(q_1 - q_2) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{q}_2 - 2(q_1 - q_2) = 0$$

وبجمع وطرح هاتين المعادلتين نحصل علي التالي:

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0, \quad \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 + 4(q_1 - q_2) = 0$$

ويكون حل المعادلتين هو
$$q_1 + q_2 = 2At + 2B, \qquad q_1 - q_2 = 2C\sin(2t + \tau)$$

حيث تكون الكميات A, B, C, τ ثوابت ونجد الحل إذن (بجمع وطرح المعادلات السابقة)

$$q_1 = At + B + C\sin(2t + \tau), \quad q_2 = At + B - C\sin(2t + \tau)$$

ب) سوف نعرف كمية حركة العموم بأنها

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \qquad (1)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t أي أن

$$p_s = p_s(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (2)$$

والآن اعتبر دالة هاملتون H وتعرف بالعلاقة الآتية:

$$H = \sum_{s=1}^{n} p_s \dot{q}_s - L \qquad (3)$$

وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t، ولكن يمكن استخدام (٢) لحذف $\dot{q}_s$ لتكون بدلالة p_s, q_s, t وبذلك تكون الدالة H معتمدة علي p_s, q_s, t أي أن

$$H = H(q_s, p_s, t) \qquad (4)$$

وإذا استخدمنا الرمز Δ للتعبير عن الزيادة في أية دالة في المتغيرات q_s, p_s, t أو المتغيرات $q_s, \dot{q}_s, t$ نتيجة للتغيرات المتناهية الصغر في تلك المتغيرات أي $\Delta q_s, \Delta p_s, \Delta \dot{q}_s, \Delta t$ وبهذا فإن التغير في الدالة H والناشئ من تغير البارامترات التي تعتمد عليها الدالة والمعرفة في المعادلة (٣)، وحيث أن $L = L(q, \dot{q}, t)$

نجد إذن
$$\Delta H = \sum_s (p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s) - \sum_s \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t$$

وباستخدام تعريف كمية حركة العموم p_s في المعادلة (١) وكذلك من معادلات لاجرانج نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_s}, \qquad p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, \quad \dot{p}_s=\frac{\partial L}{\partial q_s},$$

وبذلك فإن التغير الكلي في دالة هاملتون يأخذ الصورة التالية:

$$(5)\ \Delta H=\sum_s \dot{q}_s \Delta p_s-\sum_s \dot{p}_s \Delta q_s+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t$$

والآن من مجموعة المعادلات (٢) وعددها n معادلة في مجموعة المجاهيل $\dot{q}_s$ والتي عددها n أيضاً فإنه يمكن الوصول علي مجموعة سرعات العموم كدوال في إحداثيات العموم q_s وكميات حركة العموم والزمن t أي أن

$$(6)\ \dot{q}_s=\dot{q}_s(q_s,p_s,t)$$

وبالتعويض في المعادلة (٣) للتخلص من سرعات العموم $\dot{q}_s$ فإن دالة هاملتون تصبح في صورة المعادلة (٤)، وبإيجاد التغير فيها نجد أن

$$(7)\ \Delta H=\sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta q_s+\sum_s \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s+\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t$$

وحيث أن التغير في (٧) يجب أن يطابق تماماً التغير في (٥) وبما أن التغيرات $\Delta t,\ \Delta q_s,\ \Delta p_s$ هي تغيرات مستقلة عن بعضها البعض وبذلك تنتج المعادلات التالية

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad -\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (8)$$

ويتضح من هذه المعادلات أن دالة هاملتون H لا تعتمد صراحة علي الزمن إلا إذا اعتمدت دالة لاجرانج عليه، أي أنه إذا كان $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ فإنه أيضاً يكون $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ أما باقي المعادلات في (٨) فتعطينا معادلات الحركة

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (9)$$

وتسمي هذه المعادلات بمعادلات هاملتون القانونية وهي مكونة من عدد 2n معادلة تفاضلية من الرتبة الأولي والتي يؤدي حلها إلي تعيين عدد 2n مجهول منها n إحداثي عموم q_s، n كمية حركة العموم p_s و هذه الكميات هي دوال في الزمن.

إجابة السؤال الثاني:

(أ)

* إحداثيات العموم: هي تلك الإحداثيات المستقلة واللازمة والكافية لتعيين موضع المجموعة تعييناً فريداً، وإذا كان عدد هذه الإحداثيات هو n فإننا نرمز لإحداثيات العموم بالرموز $q_1,q_1,\ldots,q_n$ وبصفة مركزة q_s حيث $s=1,2,..,n$

* سرعات العموم: تسمي $\dot{q}_s = \frac{\partial q_s}{\partial t}$ الكميات بسرعات العموم المنظرة لإحداثيات العموم q_s ويلاحظ أنه لا يشترط أن تكون وحدات سرعات العموم (طول \ زمن).

* كمية حركة العموم: تعرف بأنها $p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$، وهي تعتمد علي إحداثيات العموم q_s للمنظومة وسرعات العموم $\dot{q}_s$ وربما صراحة علي الزمن t .

* القيود وأنواعها: تنقسم القيود التي وضعها علي حركة مجموعة من النقط المادية إلي نوعين أساسيين،

١) القيد التفاضلي أو الكينماتيكي ، وفيه تكون المعادلات المعبرة عن القيود تحتوي علي إحداثيات جميع العناصر أو بعضها وكذلك تفاضلاتها بالنسبة للزمن علاوة علي ظهور الزمن t صراحة.

٢) القيد الهندسي: وفيه لا تظهر السرعات $\dot{\vec{r}}_j$ في معادلات القيود وتكون تلك المعادلات علي الصورة

$$f(\vec{r}_j, t) = 0$$

* قوي العموم: تسمي الكميات $Q_s = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}$ بقوي العموم المصاحبة لإحداثيات العموم q_s ، $\vec{r}_k$ هي متجهات الموضع لعناصر المنظومة والتي عدد عناصرها N ، $\vec{F}_k$ هي القوي المؤثرة علي عناصر المنظومة

ب)

يمكن تعيين القوي الكارتيزية $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ أو قوي العموم Q_φ, Q_ψ من نفس دالة الجهد U والتي إذا قيست من المستوي الأفقي الذي يمر بالنقطة الثابتة O نجد أن طاقة الوضع للمجموعة هي:

$$U = -m_1 g\, y_1 - m_2 g\, y_2 = -m_1 g(a\cos\varphi) - m_2 g\,(a\cos\varphi + b\cos\psi)$$
$$= -(m_1 + m_2) g\, a\cos\varphi - m_2 g\, b\cos\psi$$

ومن معادلات التعريف تنتج القوي المطلوبة

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 U = m_1 g\,\hat{j}, \qquad \vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 U = m_2 g\,\hat{j}$$
$$Q_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -(m_1 + m_2) g a \sin\varphi, \qquad Q_\psi = -\frac{\partial U}{\partial \psi} = -m_2 g b \sin\psi$$

ج)

القوة المؤثرة علي النقطة مقدارها $F = -\frac{2m}{r^3}\hat{r}$ حيث r هو بعد النقطة المادية عن مركز القوة الجاذب عند O. وباستخدم الإحداثيات القطبية r, θ كإحداثيات عموم فان

طاقة الحركة

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

طاقة الجهد

$$U = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}.dr$$

$$= -\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^3}\hat{r}.(\hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta) = -\frac{m}{r^2}$$

دالة لاجرانج هي

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن θ هو احداثي دوري

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \beta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\beta}{mr^2}$$

دالة راوس هي

$$R = L - \sum \dot{r}_j \beta_j$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m}{r^2} - \dot{\theta}\beta$$

$$= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{r^2} - \frac{\beta^2}{2mr^2}$$

بالنسبة للاحداث غير الدوري r نطبق معادلة لاجرانج

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial R}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \left[\frac{-2m}{r^3} + \frac{\beta^2}{mr^3}\right] = 0$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن $\beta = 2m$

$$\Rightarrow 2\dot{r}\ddot{r} - \frac{\dot{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow \dot{r}^2 + \frac{2}{r^2} = A$$

ومن الشروط الابتدائية نجد أن $A = 2$ بالتعويض واجاء التكامل نجد ان

$$\int_2^r \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - 1}} = \int_0^t \sqrt{2}dt \Rightarrow r = \sqrt{2t^2 + 2\sqrt{6}t + 4}$$

أما بالنسبة للاحداث الدوري θ فيكون

$$\theta = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta}dt = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 2\sqrt{6}t + 4} = \sqrt{2}\tan^{-1}(\sqrt{2}t + \sqrt{3}) + \theta_0$$

إجابة السؤال الثالث:

(أ)

* الإحداثيات الدورية هي بعض إحداثيات العموم التي لا تظهر في دالة لاجرانج L بينما تظهر سرعات العموم المصاحبة لها في الدالة L.

* دالة راوس هي: $R = L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j, t) - \sum_{j=k+1}^{n} \dot{r}_j p_j$ ، حيث $q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j, t\ \dot{r}_j, p_j$ هي علي الترتيب إحداثيات العموم الغير دورية، سرعات العموم الغير دورية، سرعات العموم الدورية، الزمن، كميات حركة العموم الدورية.

الآن: حيث أن كميات حركة العموم p_j للإحداثيات الدورية هي $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}$ فيكون من معادلات لاجرانج أن

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial r_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = const. = \beta_j$$

كمية العموم المناظرة للإحداثيات الدورية تكون **ثابتة دائماً**.

لايجاد شرط انتظام الحركة يجب أن يكون $\quad \dot{r}_j = \Omega_j \qquad \dot{q}_s = 0, \qquad q_s = \alpha_s,$

وفي هذه الحالة فان دالة لاجرانج $\quad L = L(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j)$

لذلك $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = f_s(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0$

وهذا يؤدي الي $\quad \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{st} = 0$

أيضا نجد أن $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} = g_j(q_s, \dot{q}_s, \dot{r}_j) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j}\right) = 0$

وهذا يؤدي الي $\quad \left(\frac{\partial L}{\partial r_j}\right)_{st} = 0$

مما سبق يتضح أن شرط انتظام الحركة يجب أن يكون $\quad \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)_{q=\alpha,\ \dot{r}=\Omega} = 0$

ب)

هنا دالة لاجرانج هي $L = T - U = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + 2\cos\theta$ ومنهـا نجد أنـه يوجد إحداثي غير دوري وهو θ و يوجد إحداثي دوري وهو φ ولذلك تكون الشروط $\dot{\varphi} = w, \quad \theta = \alpha$ وبجعل المشتقة الجزئية $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ تتلاشى وحيث أن

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2\sin\theta \sin\theta \dot{\varphi}^2 - 2\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right)_{st} = 2\sin\alpha\,(w^2\cos\alpha - 1) = 0$$

ويكون شرط انتظام الحركة هو $w^2 = \sec\alpha$، فإذا كانت $\alpha = 60^0$ فإن $w^2 = 2$ وتكون $w = \sqrt{2}$.

إجابة السؤال الرابـــع:

أ) يعرف قوس بواسون لأي دالتين f, g كما يلي $\{f,g\} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_s}\frac{\partial g}{\partial p_s} - \frac{\partial f}{\partial p_s}\frac{\partial g}{\partial q_s}\right)$ حيث n هي عدد إحداثيات العموم.

أما خواصه له $\quad (3)\ \{f,g\} = -\{g,f\} \qquad (2)\ \{f,c\} = 0 \qquad (1)\ \{f,f\} = 0$

أما متطابقة جاكوب فهي $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ بشرط أن الدوال f,g,h تبقى في ترتيب دوري واحد.

ب) إذا كانت دالة هامتلون H لا تعتمد علي الزمن t فيكون $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ وكذلك من خواص أقواس بواسون يكون

لدينا $\{H, H\} = 0$ الآن من العلاقة $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \{H, H\} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{constant}$

أي أنا تكون ثابتة دائماً أثناء الحركة.

جـ) يكون لدينا من أقواس بواسون كالتالي:

* بالنسبة للمتجه $\vec{r}$ يكون $\{x, x\} = \{y, y\} = \{z, z\} = 0$

* بالنسبة للمتجه $\vec{p}$ يكون $\{p_x, p_x\} = \{p_y, p_y\} = \{p_z, p_z\} = 0$

* بالنسبة للمتجه $\vec{r}$ مع $\vec{p}$ يكون

$$\{x, p_x\} = 1, \quad \{x, p_y\} = 0, \quad \{x, p_z\} = 0$$
$$\{y, p_x\} = 0, \quad \{y, p_y\} = 1, \quad \{y, p_z\} = 0$$
$$\{z, p_x\} = 0, \quad \{z, p_y\} = 0, \quad \{z, p_z\} = 1$$