جـــامعه بنـــــها | اعات |
---|---|---
كلـيه الـــــعلوم | | الترم : الأول
قسم الرياضيات | | التاريخ: ٢٧-١٢-١٤

إجابـــــــــــــــــة
أمتحان مادة التحليل للفرقة الثالثة تربية أساسى (نظام قديم)
أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول:

أ- إذا كانت $z = x\sin y + x^2$ أوجد كل من

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

الحـــل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y + 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$$

نلاحظ أن $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ وهذا يتحقق دائماً إذا كانت المشتقات التفاضلية الأولى موجودة وكانت z_{xy} z_{yx} دوال متصلة .

ب- بفرض أن y دالة قابلة للتفاضل ومعرفة ضمنياً بالمعادلة

$$y^3 + 3xy + x^3 - 5 = 0$$

أوجد y' بدلالة y, x .

الحـــــــــل:

بتفاضل المعادلة المعطاة مباشرة بالنسبة إلى x نحصل على

$$3y^2 y' + 3xy' + 3y + 3x^2 = 0$$

ومنها نوجد المشتقة

$$y' = -\frac{y + x^2}{y^2 + x}$$

السؤال الثاني:

أ- أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$z = x + y + \frac{a^3}{xy}$$

ومدى اعتماد ذلك على قيمة الثابت a .

الحــل

أولاً نوجد النقط الحرجة

$$z_x = 1 - \frac{a^3}{x^2 y} = 0$$

$$z_y = 1 - \frac{a^3}{xy^2} = 0$$

من هاتين المعادلتين واضح أن

$$x \neq 0 \qquad , \qquad y \neq 0$$

إذن

$$x^2 y - a^3 = 0 \quad , \quad xy^2 - a^3 = 0$$

$$\therefore x^2 y - xy^2 = 0 \Rightarrow xy(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\therefore x = y = a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة وهي (a,a)

$$z_{xx} = \frac{2a^3}{x^3 y} \quad , \quad z_{xy} = \frac{a^3}{x^2 y^2} \quad , \quad z_{yy} = \frac{2a^3}{xy^3}$$

عند النقطة الحرجة (a,a) تكون

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = \frac{2}{a} \cdot \frac{2}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{3}{a^3} > 0$$

إذا كانت $a > 0$ فإن $z_{xx} = \frac{2}{a} > 0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\min} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

إذا كانت $a < 0$ فإن $z_{xx} < 0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\max} = a + a + \frac{a^3}{a^2} = 3a$$

ب- أوجد مفكوك كل من الدوال الآتية بدلالة قوى x

$i)\ e^{x} \qquad ii)\ \ln(1+x)$

الحــــــــل:

١ـ الدالة الأسية e^{x}

لدينا أن

$$f(x)=e^{x} \quad , \quad f^{(n)}(x)=e^{x}$$

$$\therefore f(0)=1 \quad , \quad f^{(n)}(0)=1 \quad , n=1,2,3,\ldots$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد أن

$$\therefore e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\cdots$$

هذه المتسلسلة تقاربيه لجميع قيم x وهذا يعني أن هذا المفكوك صحيح لجميع قيم x .

٢ـ الدالة اللوغاريتمية $\ln(1+x)$

لدينا أن

$$f(x)=\ln(1+x)\,,\; f'(x)=\frac{1}{1+x}\,,\; f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^{2}}\,,$$

$$f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^{3}}\,,\cdots\cdots\,,\; f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$$

$$\therefore f(0)=\ln(1)=0\,,\; f'(0)=1\,,\; f''(0)=-1\,,$$

$$f'''(0)=2!\,,\cdots\cdots\,,\; f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\therefore \ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+\cdots$$

وفترة تقارب هذه المتسلسلة هي $-1<x\le 1$.

السؤال الثالث:

أ- أوجد معادلة المماس للمنحنى $y=x^{2}$ عند النقطة $P(-1,1)$.

الحــــل :

من المعروف أن معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (a,b) هي

$$y-b=m(x-a)$$

لذلك يجب أن نوجد ميل المماس عند النقطة $P(-1,1)$ والذي ينتج بالتعويض عن $x=-1$ في دالة المشتقة ، فإذا كتبنا

$$f(x)=x^2 \Rightarrow \therefore f'(x)=2x \Rightarrow \therefore f'(-1)=-2$$

وتكون معادلة المماس عند النقطة P هي

$$y-1=-2(x+1) \Rightarrow \therefore y=-2x-1$$

ب- عين فترات التزايد والتناقص للدالة

$$y=x^3-x^2-8x+2$$

<u>الحـــل :</u>

نوجد مشتقة الدالة المعطاة ونعين قيم x التي تكون عندها المشتقة موجبة أو سالبة :

$$y'=3x^2-2x-8=(3x+4)(x-2)$$

نجد أن الدالة تكون تزايدية عندما $y'>0$ أي عندما

$$(3x+4)(x-2)>0$$

$\therefore$ الدالة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$$(3x+4)>0 \quad , \quad (x-2)>0$$

أو المتباينات

$$(3x+4)<0 \quad , \quad (x-2)<0$$

أي أن x تحقق المتباينات

$$x>-4/3 \quad , \quad x>2$$

أو المتباينات

$$x<-4/3 \quad , \quad x<2$$

وبحل كل متباينتين معا نجد أن الدالة المعطاة تكون تزايدية لجميع قيم x التي تحقق المتباينات

$x<-4/3$ أو $x>2$

أي أن الدالة تزايدية في الفترتين

$$(-\infty,-4/3)\,,\,(2,\infty)$$

وبالتالي تكون الدالة تناقصية في الفترة $(-4/3,2)$

<u>السؤال الرابع:</u>

أ- أدرس نهاية الدالة التالية

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2+2)$$

<u>الحـــــــــــل:</u>

قيمة هذه الدالة لا تعتمد على المسار الذي تقترب عليه النقطة (x,y) من النقطة $(0,0)$ فهي دائماً تساوي 2

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2+2)=2$$

ويتضح هذا من الآتي

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2+2)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y^2+\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 2=2$$

ب أختبر الدالة الآتية من حيث النهايات العظمى والصغرى

$$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$$

الحـــل :

١ـ نوجد المشتقة الأولى

$$y'=x^2-4x^2+3=(x-1)(x-3)$$

٢ـ نوجد جميع الجذور الحقيقة للمعادلة $y'=0$ ونجد أنها

$$x_1=1 \qquad , \qquad x_2=3$$

٣ـ نختبر النقط الحرجة

أولاً : عندما $x_1=1$ نجد أن

$$for \quad x<1: \qquad y'=(-)\times(-)>0$$
$$for \quad x>1: \qquad y'=(+)\times(-)<0$$

وعلى هذا عند المرور بالقيمة $x_1=1$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وهذا يعني أن الدالة لها قيمة عظمى عند النقطة $x_1=1$.

$$y(1)=\frac{1}{3}-2+3+1=\frac{7}{3}$$

بنفس الطريقة عند النقطة الحرجة $x_2=3$ نجد أن

$$for \quad x<3: \qquad y'=(+)\times(-)<0 \quad --$$
$$for \quad x>3: \qquad y'=(+)\times(+)>0$$

أي أنه عند المرور بالنقطة $x_2=3$ تتغير إشارة المشتقة من موجب إلى سالب وعلى ذلك يكون للدالة قيمة صغرى عند هذه النقطة

$$y(3)=\frac{1}{3}(3)^3-2(3)^2+3(3)+1=1$$

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق محمد
كلية العلوم- قسم الرياضيات