جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيـات

الفرقة الثالثة تربية عام (رياضيات - لائحة قديمة)

الفصل الدراسي الأول

يوم الامتحان: الأربعاء 31/ 12 / 2014 م

المادة : رياضيات تطبيقية (النظرية النسبية الخاصة)

أستاذ المادة : د . / خليل محمد خليل محمد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

صورة من الامتحان+ نموذج إجابته

كليـة : التربية	الفرقة الثالثة (لائحة قديمـة)	التاريخ: 2014/12/31
شعبة : الرياضيات	تطبيقية (نسبيـة + متصلـة)	الزمن : ثلاث ساعات

==

ثانياً: النظرية النسبية الخاصة

أجب عن الأسئلة الآتية:

1-a	اذكر تجارب ألبرت اينشتاين الذهنية والتي استنتج منها نتائج جديدة في النظرية النسبية الخاصة ثم تكلم عن أحداهما بالتفصيل؟
1-b	مسطرة ساكنة عند المشاهد S' ولها الطول l' وتميل على محور x' بالزاوية θ'. احسب الطول l لهذه المسطرة والزاوية θ التي تميل بها على محور x بالنسبة للمشاهد S والذي يتحرك إلى يمينه المشاهد S' بالسرعة υ.
2-a	إذا تحركت نقطة مادية فان متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد S هو $$\vec{u} = \hat{i}u_x + \hat{j}u_y + \hat{k}u_z$$ ويكون متجه السرعة $\vec{u}'$ عند المشاهد S' هو $$\vec{u}' = \hat{i}u_{x'} + \hat{j}u_{y'} + \hat{k}u_{z'}$$ أوجد تحويلات لورنتز التي تربط بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u}'$ ؟
2-b	إشارة ضوئية انطلقت من O وامتصت في النقطة P على مسافة l من O حيث الزاوية POX هي θ عند S. أوجد الزمن τ' والمسافة l' بين انبعاث الضوء وامتصاصه عند المشاهد S' ؟
3	اثبت أن قيمة الكتلة المتحركة m بالسرعة υ تكون أكبر من قيمتها و هى ساكنة m_0 وأنها تتبع العلاقة $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$ ؟ حيث c تمثل سرعة الضوء في الفراغ.

انتهت الأسئلة

وتمنياتي لكم بالتوفيق

د. /خليل محمد

إجابة السؤال 1-a:

التجارب الذهنية

أ- الأطوال العرضية على الحركة **(Transverse Length).**

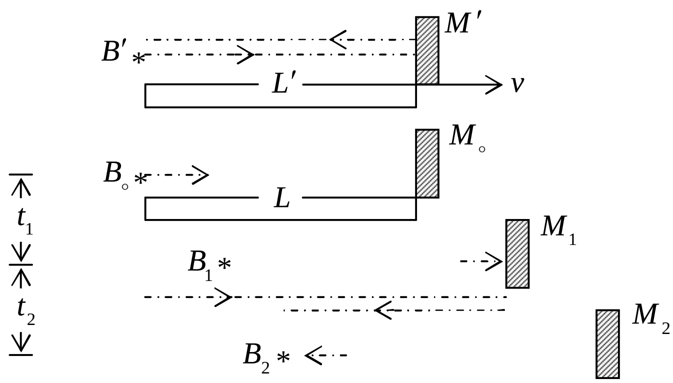
ب- الاسترخاء الزمني **Time Dilation**

ت- الانضغاط الطولي **Length contraction**

ث-عدم تزامن الساعات أثناء الحركة **Unsynchronization of moving clocks**

ج- الزمن الخصوصي والطول الخصوصي **Proper Time and Proper Length**

ثم نتكلم عن تجربة الانضغاط الطولي مثلا حيث اعتبر أينشتين التجربة الذهنية الموضحة بالرسم كما يلي



وهنا نعتبر الطول L' ساكنا بالنسبة للمشاهد S' وبذلك فإنهما يتحركان بسرعة v بالنسبة للمشاهد S ويكون مقدار هذا الطول متحركا على امتداد محور x هو L . وإذا وضعنا مرآة M' على الطرف لأيمن للطول L' وأرسلنا إشارة ضوئية من الطرف الآخر B' فإن الفترة الزمنية التي تلزم لذهاب الإشارة الضوئية إلى المرآة ثم الانعكاس والعودة إلى نقطة البداية هي $\Delta t' = 2L'/c$ ومن الواضح أن هذه الفترة الزمنية تكون بين حدثين واقعين في نفس المكان عند S' حيث خرجت الإشارة الضوئية من B' ثم عادت إلى نفس النقطة B' . وإذا بحثنا كيف يرى المشاهد S هذين الحدثين وبالطبع تكون الفترة الزمنية Δt بينهما حسب العلاقة

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad (1)$$

ومن الواضح أن الإشـــــارة الضوئية تبدأ عند النقطة $B_\circ$ وتصل إلى المرآة عند الوضع M_1 وليس $M_\circ$ ثم تنعكس وتعود لكي تصل إلى طرف البداية عند الوضع B_2 وذلك لأن الطول L متحرك أيضا أثناء مسيرة الضوء ، وهذا الطول L هو دائماً المسافة بين النقطتين M, B أي أن

$$L = B_\circ M_\circ = B_1 M_1 = B_2 M_2$$

والآن يمكننا حساب الفترة الزمنية بين خروج الإشارة الضوئية وعودتها حيث أنها مجموع زمني رحلتي الذهاب والعودة وكما يتضح من الرسم

$$\Delta t = t_1 + t_2$$

$$B_\circ M_1 = ct_1 = L + vt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L}{c-v}$$

$$M_1 B_2 = ct_2 = L - vt_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{L}{c+v}$$

$$\Delta t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

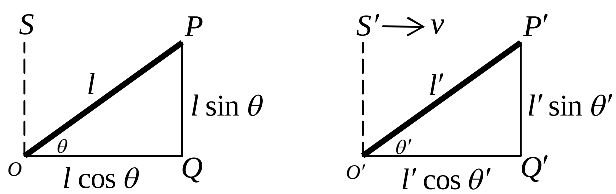
وبالتعويض في المعادلة (1) عن كل من $\Delta t', \Delta t$ نجد أذن

$$\frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2} = \frac{2L'}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة توضح أن الطول الثابت L' عند المشاهد S' سوف يكون قياسه عند S هو الطول المتحرك L ومقداره أقل من L' إذا كانت الحركة موازية لهذا الطول .

إجابة السؤال 1-b:



المسطرة الساكنة عند S' تحدد المثلث القائم $\Delta\, O'Q'P'$ وضلعي القائمة فيه أحدهما موازي للحركة والآخر عمودي عليها وعلى ذلك يكون قياسهما عند S كما يلي

$$l\cos\theta = l'\cos\theta'\sqrt{1-\beta^2}$$

$$l\sin\theta = l'\sin\theta'$$

حيث نستعمل الرموز المعتادة $\beta = \dfrac{v}{c}$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. ولإيجاد l نجمع مربعي هاتين المعادلتين ولإيجاد θ نقسم المعادلة الثانية على المعادلة الأولى وبذلك نجد

$$l^2 = l'^2\cos^2\theta'(1-\beta^2) + l'^2\sin^2\theta' = l'^2\left[1-\beta^2\cos^2\theta'\right]$$

$$l = l'\sqrt{1-\beta^2\cos^2\theta'}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta'}{\cos\theta'\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tan\theta = \gamma\tan\theta'$$

إجابة السؤال 2-a:

إذا تحركت نقطة مادية فإن متجه السرعة $\vec{u}$ لها عند المشاهد S هو

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

ويكون متجه السرعة $\vec{u'}$ عند المشاهد S' هو

$$\vec{u'} = u_{x'}\hat{i} + u_{y'}\hat{j} + u_{z'}\hat{k} = \frac{dx'}{dt'}\hat{i} + \frac{dy'}{dt'}\hat{j} + \frac{dz'}{dt'}\hat{k}$$

ومن معادلات تحويل لورنتز للإحداثيات يمكننا الآن إيجاد العلاقة بين مركبات كل من المتجهين $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ حيث نجد

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \qquad , \quad dy' = dy$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \quad , \quad dz' = dz$$

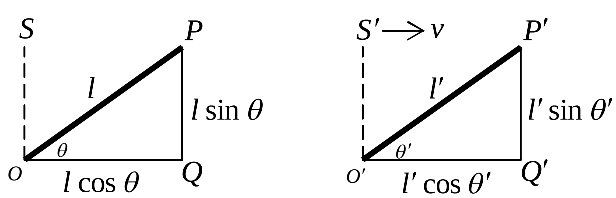
$$u_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - vdx/c^2} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}$$

$$u_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}$$

وبما أن السرعة في اتجاه $x - x'$ فإنه يلاحظ أن المركبة $u_{z'}$ تعامل مثل المركبة $u_{y'}$ وأن u_x تظهر دائما في المقام وبهذا فإن معادلات تحويل لورنتز لمركبات السرعة هي

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \quad u_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

إجابة السؤال 2-b:



إذا اعتبرنا حدث انبعاث الضوء عند اللحظة $t = 0 = t'$ فإن إحداثيات هذا الحدث عند كل من S', S هو (0,0,0,0) ولكن حدث امتصاص الضوء يكون له الإحداثيات التالية

$$S \ \ (l\cos\theta, l\sin\theta, 0, \tau) \qquad\qquad l = c\tau$$

$$S' \ (l'\cos\theta', l'\sin\theta', 0, \tau') \qquad l' = c\tau'$$

ومن تحويل لورنتز للإحداثيات ينتج إذن

$$l'\cos\theta' = \gamma\,(l\cos\theta - v\tau) = \gamma\, l(\cos\theta - \beta)$$

$$l'\sin\theta' = l\sin\theta$$

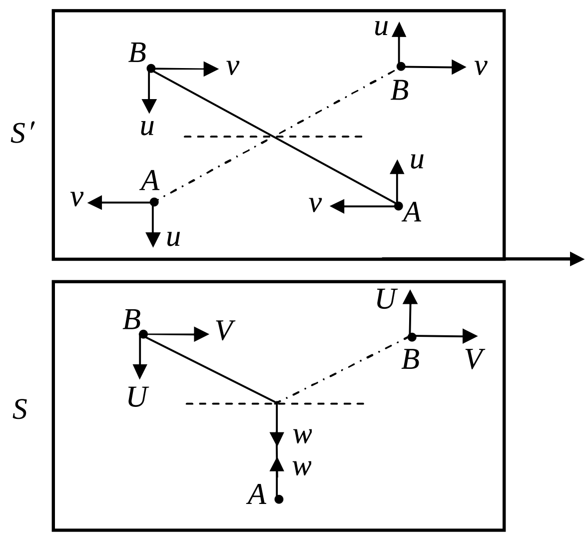
$$\tau' = \gamma\,(\tau - vl\cos\theta/c^2) = \gamma\,\tau(1 - \beta\cos\theta)$$

وهــذه المعادلــة الأخيــرة تعطينــا الــزمن المطلــوب τ' وينــتج فــورا أن المســافة المطلوبــة هــي $l' = \gamma\, l(1-\beta\cos\theta)$ وهو ما يمكن تأكيده أيضا من المعادلتين الأولى والثانية

$$\begin{aligned} l'^2 &= \gamma^2 l^2 (\cos\theta-\beta)^2 + l^2\sin^2\theta \\ &= \gamma^2 l^2\left[\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta + \beta^2 + (1-\beta^2)\sin^2\theta\right] \\ &= \gamma^2 l^2\left[1-2\beta\cos\theta+\beta^2(1-\sin^2\theta)\right] \\ &= \gamma^2 l^2 (1-\beta\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

إجابة السؤال 3:

نعتبر الجسيمين B, A متماثلين تماما وكتلهما واحدة وحركتهما في اتجاهين مضادين قبل وبعد التصادم بحيث تكون كمية الحركة الكلية لهما ساوي صفرا وذلك عند المشاهد S' الذي يحرك بسرعة v بالنســبة للمشــاهد S وفي اتجــاه عمودي على القوى الدفعيــة في التصادم التي هي في اتجاه y .



وإذا كانت هذه السرعة النسبية تساوي المركبة في اتجاه x لسرعة أحد الجسيمين B فإن التصادم عند المشاهد S يبدو غير متماثل وبحيث تصبح حركة الجسيم الآخر A في اتجاه y فقط . وبذلك تكون متجهات السرعات لكل من الجسيمين قبل وبعد التصادم وعند كل من المشاهدين S', S كما يلي

	قبل التصادم	بعد التصادم
S':	$\overrightarrow{v_A} = -v\,\hat{i} + u\,\hat{j}$	$\overrightarrow{v_{A'}} = -v\,\hat{i} - u\,\hat{j}$
	$\overrightarrow{v_B} = \ \ v\,\hat{i} + u\,\hat{j}$	$\overrightarrow{v_{B'}} = \ \ v\,\hat{i} + u\,\hat{j}$
S:	$\overrightarrow{v_A} = w\,\hat{j}$	$\overrightarrow{v_{A'}} = -w\,\hat{j}$
	$\overrightarrow{v_B} = v\,\hat{i} - u\,\hat{j}$	$\overrightarrow{v_{B'}} = v\,\hat{i} + u\,\hat{j}$

ويلاحظ ببساطة أن التصادم عند S هو نفسه الذي عند S' إذا أجرينا دورانين كل بزاوية π حول محور x ثم محور y مع تثبيت نقطة الصادم وإذا تم تبديل الجسمين مع بعضهما البعض . وعندما نستخدم معادلات تحويل لورنتز للسرعات نجد

$$u_y = \frac{u_{y'}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+\frac{v}{c^2}u_{x'}} \qquad : \qquad u = w\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ومن قانون حفظ كمية الحركة في اتجاه y عند أي من المشاهدين S', S فإن

$$m(\sqrt{u^2+v^2})\cdot u = m(w)\cdot w$$

$$m(\sqrt{u^2+v^2}) = \frac{m(w)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

وهذه المعادلة تؤدي إلى نفس النتيجة السابقة عندما نجعل $w \to 0$ فإن $u \to 0$ وتصبح المعادلة

إذ ن $m(v) = \frac{m(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ أي انه إذا شوهد أي جسيم يتحرك بالسرعة v تكون كتلته $m = \frac{m_\circ}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ حيث $m_\circ$ هي كتلة الجسيم عندما يكون ساكنا وذلك حتى نحافظ على قانون حفظ كمية الحركة .

****