كلية تربية بنها	الفرقة الثالثة رياضيات أساسى	الفصل الأول٢٠١٤/٢٠١٥

قسم الرياضيات	رياضة تطبيقية (٣)0314M	الزمن : ساعتان

الأجابة النموذجية	السبت:٢٠١٤/١٢/٢٧

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يلى الدرجة الكلية ١٢٠ درجة موزعة بالتساوى.

السؤال الأول:

أ- اثبت أن $\nabla\varphi$ عمودي على السطح $\varphi(x,y,z)=const.$.

ب- أوجد معادلة المستوى المماس للسطح $2xz^2-3xy-4x=7$ عند النقطة $(1,-1,2)$.

ج- أوجد المشتقة الاتجاهية للدالة $\varphi = x^2y + y^2z + xz^2$ في اتجاه المتجه $\underline{A} = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$.

السؤال الثاني:

أ- اذا كانت $A = e_r + \sin\theta\, e_\theta, B = \frac{a}{r^2}\sin\theta\, e_r$ أوجد $(A.\nabla)B$.

ب- احسب التكامل السطحي $\int_S f da$ للسطح المنحنى فقط حيث $f = xz + 3y - z$ والسطح s هو السطح المنحنى لنصف اسطوانة محورها z ونصف قطر قاعدتها 3 وقاعدتيها فى المستويين $z = 4, z = 0$

السؤال الثالث:

أ- أذكر بدون برهان نظرية جاوس ثم استخدم النظرية لايجاد التكامل السطحي $\oint_s \vec{F}.d\vec{s}$ حيث s هو سطح الاسطوانة التي مركزها $(0,0,0)$ ومحورها z ونصف قطر قاعدتها a وارتفاعها $2c$ اذا كان $\underline{F} = x\underline{i} + y\underline{j}$ مستخدما نظرية جاوس.

ب- احسب التكامل الخطي للحقل الاتجاهي $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}$ على مسار المستقيم Γ و الواصل من النقطة $(0,0,3)$ الى النقطة $(2,-8,3)$.

السؤال الرابع:

أ- اذكر بدون برهان نظرية ستوكس ثم حقق النظرية للمتجة $\underline{A}$ حيث $\underline{A} = -y\underline{i} + x\underline{j}$ على المسار c حيث c عبارة عن دائرة في المستوى xy ومركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a .

ب- باستخدام نظرية جاوس للانتشار احسب $\oiint \underline{F}.\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\underline{j} + yz\underline{k}$ و السطح هو المكعب الذي تحدده المستويات $x = o , x = 1, y = o, y = 1, z = o, z = 1$.

السؤال الخامس:

أ- أكتب القوانين التالية بدون برهان $\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial u_k} =$ ...., $\frac{\partial \underline{e}_k}{\partial u_j} =$ .... ومن ثم أوجد $\frac{\partial \underline{e}_\varphi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r}$

ب- احسب التكامل السطحي $\int_s F.ds$ حيث $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}$ حيث s هو السطح العلوي لنصف كرة أعلى المستوى xy ونصف قطرها 2. (السطح المنحنى فقط).

مع تمنياتى بالتوفيق

أ.د/محمود عبد العاطى

نموذج الأجابة

اجابة السؤال الأول:

أ- البرهان :

نفرض أن $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ هو متجه موضع أي نقطة $M(x, y, z)$ على السطح فيكون متجه موضع هذه النقطة بالنسبة لنقطة الأصل هو $\underline{r}$ وعليه فإنه إذا كان $M'(\underline{r} + d\underline{r})$ نقطة تحقق معادلة السطح فإن

$$d\underline{r} = dx\underline{i} + dy\underline{j} + dz\underline{k}$$

يقع على المســـــتوى المماس عند M وحيث $d\phi$ هي التفاضلة التامة للدالة ϕ فإنها

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz = 0$$

ويمكن كتابتها على الصورة

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\underline{k} \right) \cdot (dx\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\underline{k})$$

$$= \nabla\phi \cdot d\underline{r} = 0$$

وهذا يعني أن المتجه $\nabla\phi$ يتعامد مع المتجه $d\underline{r}$ الذي يقع في المســتوى المماس للسطح عند النقطة M وبذلك يكون $\nabla\phi$ عموديا على السطح عند النقطة M

....

ب-

أوجد معادلة المماس (المستوى المماس) للسطح

$$2xz^2 - 3xy - 4x = 7$$

عند النقطة $(1,-1,2)$

الحـــــل :

المتجه العمودي على السطح هو $\nabla\phi$ وكما نعلم

$$\nabla\phi = \nabla(2xz^2 - 3xy - 4x)$$

$$= (2z^2 - 3y - 4)\underline{i} - 3x\,\underline{j} + 4xz\underline{k}$$

وعند النقطة $(1,-1,2)$ يكون العمودي على السطح هو

$$\nabla\phi\big|_{(1,-1,2)} = 7\underline{i} - 3\underline{j} + 8\underline{k}$$

ولكن معادلة المستوى الذي يمر بنقطة متجه موضعها $\underline{r_{\circ}}$ والعمودي

على متجه معين $\underline{n}$ هي $\underline{n} \cdot (\underline{r} - \underline{r_{\circ}}) = 0$

وعلى ذلك تكون المعادلة المطلوبة هي

$$\therefore (7\underline{i}-3\underline{j}+8\underline{k})\cdot\{(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})-(\underline{i}-\underline{j}+2\underline{k})\}=0$$

$$\therefore 7(x-1)-3(y+1)+8(z-2)=0$$

$$\therefore 7x-3y+8z-26=0$$

وهي تمثل معادلة المستوى المطلوب

....

<u>جـ :</u> المشتقة الاتجاهية هي

$$\frac{d\phi}{dl}=\nabla\phi\cdot\hat{\underline{t}}$$

حيث $\hat{\underline{t}}$ متجه الوحدة في اتجاه $\underline{A}$

$$\therefore \hat{\underline{t}}=\frac{\underline{A}}{|\underline{A}|}=\frac{3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{9+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\left[(2xy+z^2)\underline{i}+(2yz+x^2)\underline{j}+(2xz+y^2)\underline{k}\right]\times$$

$$\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\frac{1}{\sqrt{19}}\left[6xy+3z^2+2yz+x^2-6xz+3y^2\right]$$

....

<u>اجابة السؤال الثانى:أ</u>

إذا كان

$$\underline{A} = \underline{e_r} + \sin\theta \underline{e_\theta} \quad ، \quad \underline{B} = \frac{a}{r^2}\sin\theta \underline{e_r}$$

فأوجد $(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B}$

<u>الحــــل</u>

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left[(\underline{e_r} + \sin\theta \underline{e_\theta})\cdot\nabla\right]\left\{\frac{a}{r^2}\sin\theta \underline{e_r}\right\}$$

باستخدام ∇ في الإحداثيات الكروية نجد أن

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{a}{r^2}\sin\theta \underline{e_r}\right)$$

$$(\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = -\frac{2a}{r^3}\sin\theta \underline{e_r} + \frac{a}{r^2}\sin\theta\frac{\partial \underline{e_r}}{\partial r}$$
$$+\frac{a}{r^3}\sin\theta\cos\theta \underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial \underline{e_r}}{\partial\theta}$$

ولكن

$$\frac{\partial \underline{e_r}}{\partial r} = 0 \quad ، \quad \frac{\partial \underline{e_r}}{\partial\theta} = \underline{e_\theta}$$

$$\therefore (\underline{A}\cdot\nabla)\underline{B} = \frac{a\sin\theta}{r^3}(-2+\cos\theta)\underline{e_r} + \frac{a\sin^2\theta}{r^3}\underline{e_\theta}$$

....

<u>ب-</u> نستخدم هنا الإحداثيات الاسطوانية لجميع أجزاء السطح فيما عدا المستطيل

١- نصف الاسطوانة

$\rho = 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad 0 < z < 4$

$da_1 = \rho\, d\phi\, dz$

وكما نعلم أنه في الإحداثيات الاسطوانية

$$x = \rho \cos\phi \quad , \quad y = \rho \sin\phi \quad , \quad z = z$$

وعلى ذلك فإن التكامل السطحي على السطح المنحنى لنصف الأسطوانة

$$\iint_{S_1} f \, da_1 = \int_0^4 \int_0^\pi (3z\cos\phi + 9\sin\phi - z)3 d\phi \, dz$$

$$= 3\left[\frac{3}{2}z^2 \sin\phi - 9z\cos\phi - \frac{1}{2}z^2\phi\right]_{0,0}^{4,\pi}$$

$$= 3[9(4)(2) - 8\pi] = 24(9-\pi)$$

....

اجابة السؤال الثالث:

أ-

- إذا كان S سطح مقفل ويحوي الحجم V وكان متجه الوحدة $\hat{n}$ هو المتجه العمودي على السطح S وفي الاتجاه الخارج من الحجم V وكان الحقل الاتجاهي $\underline{F}$ معرفاً عند كل نقطة في الحجم V وعلى السطح S فإن

$$\oint_S \underline{F} \cdot \hat{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \underline{F} \, dv$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بفيض الحقل $\underline{F}$ من السطح S وتوضح لنا هذه النظرية علاقة فيض $\underline{F}$ من S بانتشار هذا الحقل $\underline{F}$ في الحيز الموجود بداخل S ، أي الحجم V

- لإيجاد التكامل السطحي نطبق الطرف الايمن من نظرية جاوس

$$0 < \rho < a, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < 2c$$

وانفراج الحقل الاتجاهي هو

$$\nabla . \vec{F} = 2$$

$$\iiint_v \nabla . \overrightarrow{\mathrm{F}})\mathrm{dv} = \int_0^{a} \int_0^{2\pi} \int_0^{2c} 2\rho d\rho d\varphi dz$$

$$=4\pi a^2 c$$

و هذا هو التكامل السطحي

....

ب-

المسار بين النقطتين (0,0,3) ، (2,–8,3) عبارة عن خط مستقيم معادلته

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-8} = \frac{z-3}{0} = \lambda$$

$$\therefore x = 2\lambda \, , \, y = -8\lambda \, , \, z = 3 \quad , \quad 0 < \lambda < 1$$

متجه الموضع

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} = 2\lambda\underline{i} - 8\lambda\underline{j} + 3\underline{k}$$

$$d\underline{r} = 2(\underline{i} - 4\underline{j})\, d\lambda$$

$$\therefore \int_\Gamma \underline{F} \cdot \hat{t}\, dl = 2\int_0^2 (5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}) \cdot (\underline{i} - 4\underline{j})\, d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[5(-8\lambda) + 4(2\lambda)(3)\right] d\lambda$$

$$= 2\int_0^1 \left[-40\lambda + 24\lambda\right] d\lambda = 2\int_0^1 \left[-16\lambda\right] d\lambda$$

$$= -32\left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1 = -16$$

<u>اجابة السؤال الرابع</u>

- إذا كان Γ مسار مقفل يحدد أي سطح S فيكون التكامل الخطي للمتجه $\underline{F}$ حول Γ يساوي التكامل السطحي لدوران المتجه $\underline{F}$ حول S ويمكن صياغتها رياضياً كما يلي

$$\oint_{\Gamma} \underline{F} \cdot \hat{t}\, dl = \int_{S} (\nabla \wedge \underline{F}) \cdot \underline{n}\, ds$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر بالتفاف الحقل $\underline{F}$ حول المسار Γ وتوضح لنا هذه النظرية علاقة التفاف $\underline{F}$ حول Γ بمركبة دوران $\underline{F}$ في الاتجاه العمودي على المنطقة المحاطة بالمسار Γ

- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل لذلك

$x = a\cos\theta \quad , \quad y = a\sin\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$\oint_{c} \underline{A} \cdot \underline{dr} = \oint_{c} \{(-y)dx + xdy\}$ =

$\oint_{c} \ [a^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta] d\theta$=

$\int_0^{2\pi} a^2 d\theta = 2\pi a^2$ (1)

أيضاً

$$\nabla \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2k$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_{s} \ \nabla \wedge \vec{A} . ds = \int_0^a \int_0^{2\pi} \ 2k . k\rho d\rho d\varphi$$

$=2\pi a^2$ (٢)

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت

....

ب- من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_v (\nabla\cdot \underline{F})\, dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x, y, z أي أن

$$\nabla\cdot\underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4z - y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2 - yz)_0^1\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}$$

....

اجابة السؤال الخامس

....

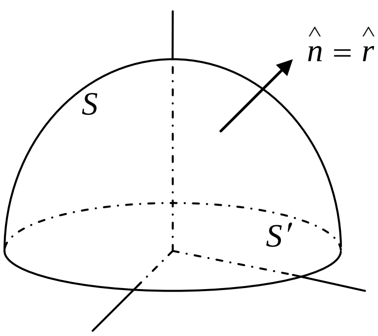
أ-

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\underline{e}}_k}{\partial u_j} = \frac{\underline{\underline{e}}_j}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial u_k} \quad ,k, j = 1,2,3 \quad ,k \neq j}$$

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\underline{e}}_k}{\partial u_k} = -\frac{\underline{\underline{e}}_{k+1}}{h_{k+1}}\frac{\partial h_k}{\partial u_{k+1}} - \frac{\underline{\underline{e}}_{k+2}}{h_{k+2}}\frac{\partial h_k}{\partial u_{k+2}}}$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = o, \qquad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -sin\theta e_{\underline{r}} - cos\theta e_{\underline{\theta}}$$

ب-احسب التكامل السطحي $\int_S \underline{F} \cdot \hat{n}\, da$ للحقل الاتجاهي $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}$ حيث S هو سطح نصف كرة أعلى المستوى xy ونصف قطرها 2 .



الحـــل

نستعمل الإحداثيــات الكروية فيكون

نصف الكرة هو السطح S وتعريفه $r = 2, 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}, 0 < \phi < 2\pi$

$$x = 2\sin\theta\cos\phi\,,\; y = 2\sin\theta\sin\phi\,,\; z = 2\cos\theta$$

$$\hat{n} = \hat{r} = \frac{\underline{r}}{r} = \frac{1}{2}(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k})$$

$$da = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = 4\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$\int_S \underline{F} \cdot \hat{n}\, da = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}) \cdot (x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}) \cdot 2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[20\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - 8\sin^2\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + 12\sin\theta\cos\theta\cos\phi\right]\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

والتكاملات على ϕ تعطي

$$\int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi \, d\phi = \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi = [\sin\phi]_0^{2\pi} = 0$$

$$\therefore \int_S \underline{F} \cdot \hat{n} \, da = 0$$

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق

أ.د.محمود عبد العاطى محمود   كلية العلوم