جامعة بنها – كلية التربية - الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٤/٢٠١٥
امتحان الفرقة الثالثة (لائحة قديمة) تربية عام – شعبة رياضيات
المادة / كهربية ساكنة ومرونة **الزمن / ثلاث ساعات**

الكهربية الساكنة (الدرجات موزعة بالتساوى)

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

أ- أثبت أن المجال الكهروستاتيكي للمزدوج الكهربي يعطى بالعلاقة

$$\underline{E} = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

ب- ثلاث شحنات $e,-4e,e$ موضوعة على خط مستقيم واحد عند النقط a,b,c بحيث كان $ab=bc$ أوجد خطوط القوى وأثبت أن خط القوة الذي يترك c يصل إلى نقطة ما بزاوية قدرها β مع bc حيث تكون دائماً أقل من 60° ٠

السؤال الثاني

أ- أوجد معادلة خطوط القوى لمجموعة من الشحنات موضوعة على استقامة واحدة ٠

ب- أنبوبة لانهائية الطول مستطيلة الشكل ثلاثة أوجه منها متصلة بالأرض والوجه الرابع رفع إلى جهد ثابت مقداره $V_\circ$ إذا كان مقطعها عمودي على محور z وأبعاده a,b كما هو مبين بالشكل المقابل ٠ أوجد الصورة العامة للجهد عند أي نقطة ٠

السؤال الثالث

أذكر خمسة خواص من خواص الموصلات ٠ وإذا كان هناك ثلاث شرائح كروية الشكل متحدة المركز أنصاف أقطارها a,b,c بحيث أن $a<b<c$ ٠ إذا كانت الشريحة الداخلية التي نصف قطرها c متصلة بالأرض والشريحة الخارجية التي نصف قطرها a أيضا متصلة بالأرض بينما الشريحة الوسطى تحمل شحنة مقدارها e ٠ بين كيف تتوزع الشحنة e على السطح الداخلي والخارجي للشريحة الكروية الوسطى ٠

مع أطيب التمنيات بالنجاح **أنظر ورقة إختبار نظرية المرونة**

إجابة اختبار مادة الكهربيه الساكنه للفرقة الثالثة (لائحة قديمة) تربية عام - كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٤ الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الأثنين الموافق ٢٠١٤/١٢/٢٩ (نصف ورقه امتحانيه)
أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ- العلاقة بين المجال الكهربي والجهد هي

$$\underline{E} = -\nabla V \qquad (1)$$

ولكن $V = \dfrac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore\ \underline{E} = -\nabla\left(\frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) + (\underline{M}\cdot\underline{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \qquad (2)$$

نفرض أن عزم المزدوج $\underline{M}$ هو

$$\underline{M} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} \quad , \quad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)(xM_x + yM_y + zM_z)$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} = \underline{M} \qquad (3)$$

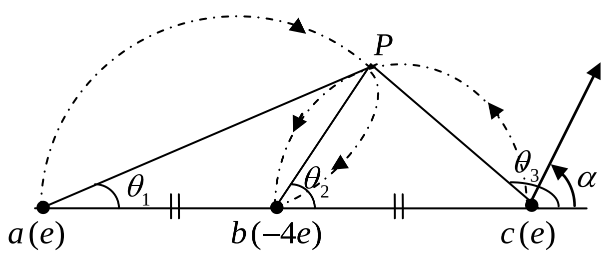
حيث $\underline{M}$ متجه ثابت ، أيضاً

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-5}\underline{r} \qquad (4)$$

إذن بالتعويض من (4),(3) في المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore\ \underline{E} = -\left[\frac{\underline{M}}{r^3} + (\underline{M}\cdot\underline{r})(-3r^{-5}\underline{r})\right] = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

ب-



معادلة خط القوة يعطى بالعلاقة

$$e\cos\theta_1 - 4e\cos\theta_2 + e\cos\theta_3 = c_\circ \qquad (1)$$

ولنفرض أن خط القوة بدأ من c بزاوية α وانتهى b بزاوية β فإنه لتعيين الثابت $c_\circ$ في المعادلة (1) نفرض أن $P \to c$ فيكون

$$\theta_1 = \theta_2 = 0\,,\ \theta_3 = \alpha$$

بالتعويض في (1) نحصل على

$$e-4e+e\cos\alpha=c_{\circ} \quad\Rightarrow\quad \therefore c_{\circ}=e\cos\alpha-3e$$

بالتعويض عن قيمة $c_{\circ}$ في المعادلة (1) ينتج أن

$$e\cos\theta_1-4e\cos\theta_2+e\cos\theta_3=e\cos\alpha-3e$$

$$\therefore \cos\theta_1-\cos\theta_2+\cos\theta_3=\cos\alpha-3 \qquad (2)$$

وهذه معادلة خط القوة الذي يخرج من c صانعاً زاوية α مع abc ، وعندما $P\to b$ فإن

$$\theta_1\to 0 \quad , \quad \theta_2\to\beta \quad , \quad \theta_3\to\pi$$

بالتعويض في المعادلة (2) نحصل على

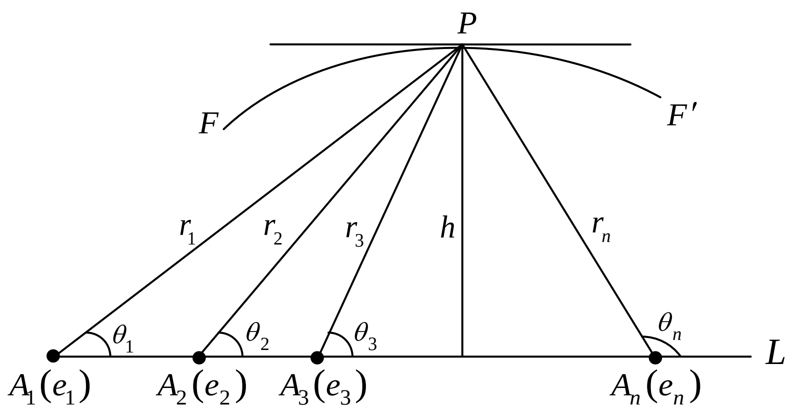
$$\therefore 1-\cos\beta-1=\cos\alpha-3 \quad\Rightarrow\quad \therefore \cos\beta=\frac{3-\cos\alpha}{4}$$

ولكن أقل قيمة تأخـذها α هي 0° وأكبر قيـمة لها π° $(0^{\circ}\le\alpha\le\pi^{\circ})$ ،

عندما $\alpha=0^{\circ}$ فإن $\cos\beta=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \therefore \beta=60^{\circ}$ وعندما $\alpha=\pi^{\circ}$ فإن $\cos\beta=\frac{3+1}{4}=1 \Rightarrow \therefore \beta=0^{\circ}$ أي أن $0^{\circ}\le\beta\le 60^{\circ}$ ،

إجابة السؤال الثاني :

أ-



نفرض أن مجموعة من الشحنات $e_1, e_2, \ldots, e_n$ موضوعة عند النقط $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ونفرض أن P نقطة تقع على خط القوى FF' ، نفرض أن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ هي أبعاد النقطة P عن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ويصنعوا زوايا $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ مع L ،

شدة المجال الناتج عن كل من الشحنات $e_1, e_2, \ldots, e_n$ عند النقطة P هي على الترتيب

$$\frac{e_1}{r_1^3}\underline{r_1}, \frac{e_2}{r_2^3}\underline{r_2}, \frac{e_3}{r_3^3}\underline{r_3}, \ldots, \frac{e_n}{r_n^3}\underline{r_n} \qquad (1)$$

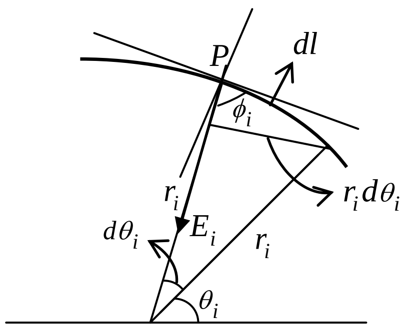
إذن شدة المجال الكلي $\underline{E}$ عند النقطة P تساوي

$$\underline{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i^3}\underline{r_i} \qquad (2)$$

بما أن FF' هو خط للقوى إذن شدة المجال تكون في اتجاه المماس ، أي أن مركبة شدة المجال في الاتجاه العمودي على المماس تنعدم أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^2} \sin\phi_i = 0 \qquad (3)$$

حيث ϕ_i هي الزاوية التي يصنعها المماس عند النقطة P مع r_i ، ولكن



$$\sin\phi_i = \frac{r_i d\theta_i}{dl} \quad , \quad \sin\theta_i = \frac{h}{r_i}$$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على

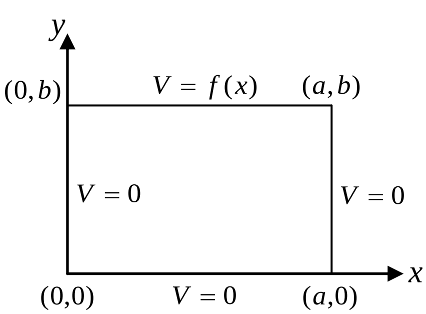
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i^2} \cdot r_i \frac{d\theta_i}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i} \cdot \frac{d\theta_i}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{h} \sin\theta_i \frac{d\theta_i}{dl} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i \frac{d}{dl}(\cos\theta_i) = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} e_i \cos\theta_i = const. \qquad (4)$$

والمعادلة (4) هي معادلة خطوط القوى الناتجة عن مجموعة من الشحنات عددها n موضوعة على استقامة واحدة ،

ب- نفرض أن الوجه الرابع رفع إلى جهد مقداره $f(x)$ من الشكل يتضح أن الجهد لا يعتمد على المتغير z ، من المعادلة (7)ينتج أن



$$\alpha^2 = -\beta^2 \quad , \quad \beta > 0$$

لذلك يأخذ الجهد الصورة

$$V(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos\beta_n x + B_n \sin\beta_n x)(C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) \qquad (1)$$

من الشروط الابتدائية نجد أن

1) $V = 0 \quad at \quad y = 0$ 2) $V = 0 \quad at \quad x = 0$

3) $V = 0 \quad at \quad x = a$ 4) $V = f(x) \quad at \quad y = b$

من الشرط الأول ينتج

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos\beta_n x + B_n \sin\beta_n x)(C_n + D_n) = 0 \qquad (2)$$

ومن الشرط الثاني نحصل على

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) = 0 \qquad (3)$$

ومن الشرط الثالث نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos\beta_n a + B_n \sin\beta_n a)(C_n e^{\beta_n y} + D_n e^{-\beta_n y}) = 0 \tag{4}$$

من المعادلة (2) نجد أن

$$C_n = -D_n \tag{5}$$

ومن المعادلة (3) نحصل على

$$A_n = 0 \tag{6}$$

وبالتعويض من المعادلة (4) في المعادلة (6) نجد أن

$$\beta_n = n\pi / a \tag{7}$$

إذن الصورة العامة للجهد عند أي نقطة لهذا النظام تأخذ الشكل

$$V(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{a}x\ (C_n e^{\beta_n y} - C_n e^{-\beta_n y}) \tag{8}$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الصورة

$$V(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \sin\frac{n\pi}{a}x\ \sinh\frac{n\pi}{a}y \tag{9}$$

حيث K_n ثابت ٠ من الشرط الرابع $V = f(x) \quad at \quad y = b$ نحصل على (10)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \sin\frac{n\pi}{a}x\ \sinh\frac{n\pi}{a}b$$

بضرب طرفي المعادلة (10) في $\sin m\pi x/a$ وبالتكامل بالنسبة إلى x من $x=0$ إلى $x=a$ نحصل على

$$\int_0^a f(x)\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^a K_n \sinh\frac{n\pi}{a}b\,\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx$$

ولكن نعلم أن

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,dx = \begin{cases} 0 & if \quad m \neq n \\ a/2 & if \quad m = n \end{cases}$$

وبتطبيق هذا القانون نجد أن

$$K_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x\ f(x)\,dx$$

بالتعويض عن قيمة K_n في المعادلة (9) نحصل على الحل العام لمعادلة لابلاس لهذا النظام في حالة الإحداثيات الكارتيزية٠ وبوضع قيم خاصة للدالة $f(x)$ يمكن حساب الثابت K_n ، فمثلاً بوضع $f(x) = V_\circ = const.$ نجد أن

$$K_n = \frac{2V_\circ}{a\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}x \ dx$$

$$= \frac{2V_\circ}{a\sinh(n\pi b/a)}\left[-\cos\frac{n\pi}{a}x\right]_0^a = -(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & n\ even \\ \dfrac{4V_\circ}{n\pi\sinh(n\pi b/a)} & n\ odd \end{cases}$$

وفي هذه الحالة تكون الصورة العامة للجهد هي

$$V(x,y) = \frac{4V_\circ}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sinh(n\pi b/a)} \sin\frac{n\pi}{a}x \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

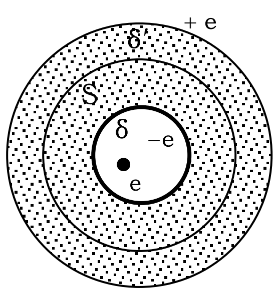
إجابة السؤال الثالث :

خمس خواص من خواص الموصلات هي

١- شدة المجال الكهربي عند أي نقطة تقع داخل الموصل تنعدم أي أن $\underline{E} = 0$ ٠

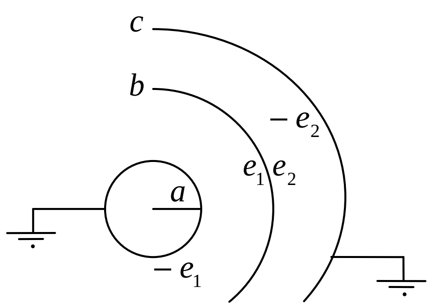
٢- عند جميع النقط على سطح الموصل المركبة العمودية للمجال الكهربي لا تنعدم أي أن $E = E_n \neq 0$ والمركبة المماسية تنعدم أي أن $E_\tau = 0$ ٠

٣- إذا رسم سطح مغلق $\sum$ داخل الموصل ولا يمر بأي فراغ يقع داخله وحيث أن المجال الكهربي داخل الموصل ينعدم أي أن $E = 0$ لذلك ينعدم المجال عند أي نقطة من السطح $\sum$ ، ولكن من معادلة بواسون $\nabla \cdot \underline{E} = 4\pi\rho$ ينتج أن كثافة الشحنة داخل السطح $\sum$ تساوي الصفر أي أن $\rho = 0$ ويمكن جعل السطح $\sum$ أصغر ما يمكن ونجد أن الشحنة داخله تنعدم ز مما سبق نستنتج أن الشحنة الكلية للموصل تتركز على سطحه ٠



٤- بما أن $E = 0$ عند أن نقطة داخل الموصل ولكن $\underline{E} = -\nabla V$ نستنتج من ذلك أن جميع النقط داخل الموصل تحمل نفس الجهد٠

٥- خط القوة لا يبدأ وينتهي إلى نفس الموصل وذلك لأن الجهد ثابت على الموصل لأن المركبة المماسية للمجال الكهربي على سطح الموصل وبالتالي يكون الموصل سطح متساوي الجهد تعدم ٠



* بما أن الشريحة الداخلية التي نصف قطرها a متصلة بالأرض إذن الشحنة على سطحها الخارجي تنعدم أي تساوي الصفر ٠ نفرض أن تتوزع إلى الشحنات e_1, e_2 على السطحين الداخلي والخارجي للشريحة الوسطى على الترتيب ٠بما أن الشحنة داخل الشريحة الوسطى تنعدم (من خواص الموصلات)

إذن يجب أن تتكون شحنة $-e_1$ على السطح الخارجي للشريحة الصغرى وأيضاً بما أن الشحنة الكلية داخل الشريحة الكبرى تنعدم إذن يجب أن تتكون شحنة مقدارها $-e_2$ على السطح الداخلي للشريحة الكبرى ٠

$\therefore\ e_1 + e_2 = e$ (a)

الجهد الناشئ عن الشحنة e عند أي نقطة داخل الشريحة الوسطى يساوي e/b ، والجهد الناشئ عن الشحنة $(-e_2)$ عند أي نقطة داخل الشريحة الكبرى يساوي $-e_2/c$ ، إذن الجهد عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يساوي مجموع الجهود أي

$$-\frac{e_1}{a} + \frac{e}{b} - \frac{e_2}{c}$$

ولكن الشريحة الصغرى متصلة بالأرض ينتج من ذلك أن الجهد داخلها ينعدم أي أن

$$-\frac{e_1}{a} + \frac{e}{b} - \frac{e_2}{c} = 0 \qquad \text{(b)}$$

من المعادلتين (a),(b) ينتج أن

$$e_1 = \frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)}$$

بالتعويض في المعادلة (a) ينتج أن

$$e_2 + \frac{a\,e_2(c-b)}{c(b-a)} = e \quad \Rightarrow \quad \therefore e_2 = \frac{c\,e(b-a)}{b(c-a)} \quad \Rightarrow \quad \therefore e_1 = \frac{a\,e(c-b)}{b(c-a)}$$