جامعة بنها – كلية التربية - الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٤/٢٠١٥
امتحان تخلفات الفرقة الثالثة (لائحة قديمة) تربية عام – شعبة رياضيات

المادة / كهربية ساكنة ومرونة **الزمن / ثلاث ساعات**

الكهربية الساكنة (الدرجات موزعة بالتساوى)

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

أ- أثبت أن المجال الكهروستاتيكي للمزدوج الكهربي يعطى بالعلاقة

$$\underline{E}=\frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5}-\frac{\underline{M}}{r^3}$$

ب- شحنتان $e,-e$ موضوعتان عند النقطتين A,B على الترتيب ، إذا كان خط القوة الخارج من النقطة A وصانعاً زاوية α مع AB يلاقي المستوى الذي يقطع وينصف AB ويتعامد علية في النقطة P ، أثبت أن

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}\,\sin\frac{P\hat{A}B}{2}$$

السؤال الثاني

أ- أوجد معادلة خطوط القوى لمجموعة من الشحنات موضوعة على استقامة واحدة ،

ب- أوجد الجهد باستخدام الإحداثيات الكارتيزية لسطحين موصلين بالأرض موضوعين عند $y=0\,,\,y=b$ والمسافة بينهما b ،

السؤال الثالث

أ- موصل يتكون من شريحتين كرويين متحدتين في المركز ، إذا كانت الشريحة الخارجية تحمل شحنة مقدارها Q والشريحة الداخلية متصلة بالأرض ، أوجد توزيع الشحنة على سطوح كل من الشريحتين والجهد على الشريحة الخارجية ،

ب- إذا كانت $\lambda=f(x,y,z)$ تمثل عائلة من السطوح حيث λ متغير ، فإن هذه العائلة من السطوح تمثل عائلة من السطوح المتساوية الجهد إذا كان $\nabla^2\lambda/\left|\nabla\lambda\right|^2$ دالة تعتمد على λ فقط ، وأوجد قيمة هذا الجهد ،

مع أطيب التمنيات بالنجاح **أنظر ورقة إختبار نظرية المرونة**

إجابة اختبار مادة الكهربيه الساكنه تخلفات الفرقة الثالثة (لائحة قديمة) تربية عام - كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٤ الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الثلاثاء الموافق ٢٠١٤/١٢/٢٣ (نصف ورقه امتحانيه)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ- العلاقة بين المجال الكهربي والجهد هي

$$\underline{E} = -\nabla V \tag{1}$$

ولكن $V = \dfrac{M \cdot r}{r^3}$ ، بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\therefore\ \underline{E} = -\nabla\left(\frac{\underline{M}\cdot\underline{r}}{r^3}\right) = -\left[\frac{1}{r^3}\nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) + (\underline{M}\cdot\underline{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\right] \tag{2}$$

نفرض أن عزم المزدوج $\underline{M}$ هو

$$\underline{M} = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} \qquad , \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}\right)(xM_x + yM_y + zM_z)$$

$$\therefore\ \nabla(\underline{M}\cdot\underline{r}) = M_x\underline{i} + M_y\underline{j} + M_z\underline{k} = \underline{M} \tag{3}$$

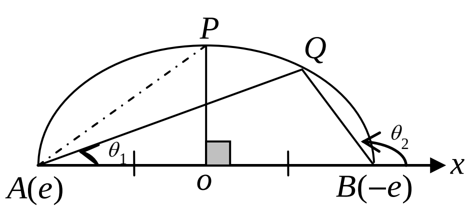
حيث $\underline{M}$ متجه ثابت ، أيضاً

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3r^{-5}\underline{r} \tag{4}$$

إذن بالتعويض من (3),(4) في المعادلة (2) نحصل على

$$\therefore\ \underline{E} = -\left[\frac{\underline{M}}{r^3} + (\underline{M}\cdot\underline{r})(-3r^{-5}\underline{r})\right] = \frac{3(\underline{M}\cdot\underline{r})\,\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{M}}{r^3}$$

ب- نفرض أن Q أي نقطة على خط القوة ونفرض أن
$\theta_1 = \angle BAQ$ ، $\theta_2 = \angle XBQ$ إذن من الفـــرض
عنـــدما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ ،
معادلة خط القوة هي



$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = c \qquad (c \quad is\ a\ const.) \tag{a}$$

باستخدام الشروط عنـــدما $Q \to A, \theta_1 \to \alpha$ فإن $\theta_2 \to \pi$ نحصل على $e\cos\alpha + e = c$ وبالتعويض عن قيمة c ينتج أن

$$e\cos\theta_1 - e\cos\theta_2 = e\cos\alpha + e$$

$$\therefore\ \cos\theta_1 - \cos\theta_2 = \cos\alpha + 1 = 2\cos^2(\alpha/2) \tag{b}$$

عند النقطة P التي تقع على المستوى الذي ينصف AB ويتعامد عليه ، تكون $\theta_1 = \angle PAB = \beta \quad say\ , \theta_2 = \pi - \beta$ لذلك تصبح المعادلة (b) على الصورة

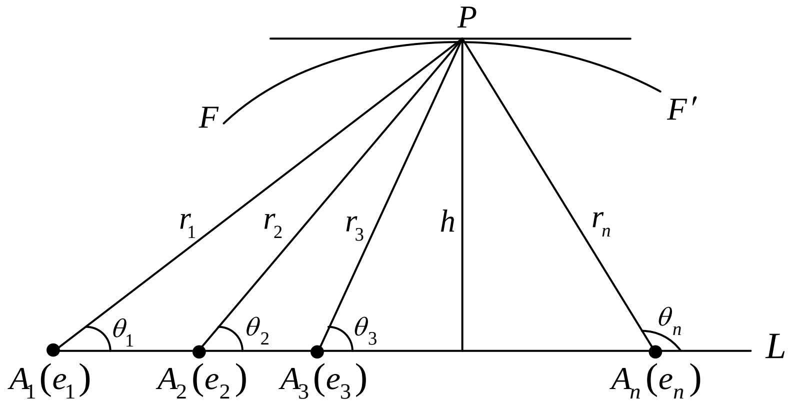
$$\cos\beta - \cos(\pi-\beta) = \cos\alpha + 1$$

$$2\cos\beta = \cos\alpha + 1 \qquad \text{(c)}$$

$$\therefore 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

إجابة السؤال الثاني :

أ-



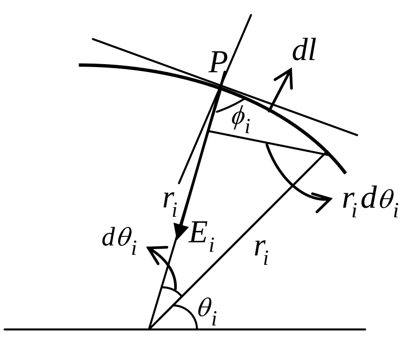
نفرض أن مجموعة من الشحنات $e_1, e_2, \ldots, e_n$ موضوعة عند النقط $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ونفرض أن P نقطة تقع على خط القوى FF' ٠نفرض أن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ هي أبعاد النقطة P عن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ويصنعوا زوايا $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ مع L ٠ شدة المجال الناتج عن كل من الشحنات $e_1, e_2, \ldots, e_n$ عند النقطة P هي على الترتيب

$$\frac{e_1}{r_1^3}\underline{r_1}, \frac{e_2}{r_2^3}\underline{r_2}, \frac{e_3}{r_3^3}\underline{r_3}, \ldots, \frac{e_n}{r_n^3}\underline{r_n} \qquad (1)$$

إذن شدة المجال الكلي $\underline{E}$ عند النقطة P تساوي

$$\underline{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i^3}\underline{r_i} \qquad (2)$$

بما أن FF' هو خط للقوى إذن شدة المجال تكون في اتجاه المماس ٠ أي أن مركبة شدة المجال في الاتجاه العمودي على المماس تنعدم أي أن



$$\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i^2}\sin\phi_i = 0 \qquad (3)$$

حيث ϕ_i هي الزاوية التي يصنعها المماس عند النقطـــة P مع r_i ٠ ولكن

$$\sin\phi_i = \frac{r_i d\theta_i}{dl} \quad , \quad \sin\theta_i = \frac{h}{r_i}$$

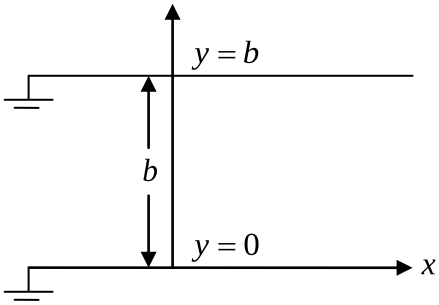
بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i^2}\cdot r_i\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{r_i}\cdot\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}\frac{e_i}{h}\sin\theta_i\frac{d\theta_i}{dl} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}e_i\frac{d}{dl}(\cos\theta_i) = 0$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}e_i\,\cos\theta_i = const. \qquad (4)$$

والمعادلة (4) هي معادلة خطوط القوى الناتجة عن مجموعة من الشحنات عددها n موضوعة على استقامة واحدة ،

ب- باستخدام الإحداثيات الكارتيزية وبما أن



$$\nabla^2 V = 0 \qquad (1)$$

وحــيث أن الجهد يعتمد على المتغيرين x, y فقط

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \qquad (2)$$

نفرض أن

$$V(x,y) = X(x)\, Y(y) \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} + X\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \qquad (4)$$

في المعادلة (4) نفرض أن

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -n^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2Y}{dy^2} = -n^2 Y \qquad (5)$$

وبالتالي نحصل على

$$\frac{d^2X}{dx^2} = n^2 X \qquad (6)$$

الحل العام للمعادلة (5) على الصورة

$$Y = A\sin ny + B\cos ny \qquad (7)$$

والحل العام للمعادلة (6) على الصورة

$$X = Ce^{nx} + De^{-nx} \qquad (8)$$

حيث أن الشروط الابتدائية هي $y=0, y=b \quad at \quad V=0$ ، $x=\pm\infty \quad at \quad V=0$ ، وباستخدام الشرط الحدي الأول نجد أن

$$B=0 \quad , \quad n = k\pi/b$$

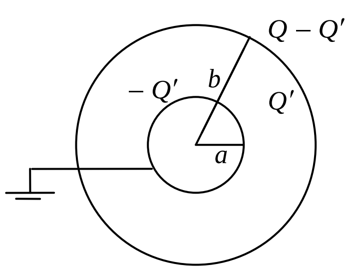
حيث k عدد صحيح ، وبذلك يكون الحل العام لمعادلة لابلاس على الصورة

$$V_1 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{\frac{k\pi}{b}x} \sin\frac{k\pi}{b}y \qquad -\infty < x < 0$$

$$V_2 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\, e^{-\frac{k\pi}{b}x} \sin\frac{k\pi}{b}y \qquad 0 < x < \infty$$

إجابة السؤال الثالث :

أ- نفرض أن b, a أنصاف أقطار الشريحتين وأن $b > a$ و نفرض أن الشحنة Q الموجودة على الشريحة الخارجية توزعت إلى $Q - Q'$ على السطح الخارجي لها وبالتالي تكون الشحنة على السطح الداخلي لها هي Q' ، بما أن الشحنة الكلية داخل الموصل الذي نصف قطره b تنعدم إذن تتكون بالتأثير شحنة $-Q'$ على السطح الخارجي للشريحة الداخلية للموصل ،



الجهد الناشئ V عند أي نقطة داخل الشريحة الصغرى يتكون من جهدين ، جهد ناشئ عن الشحنة $-Q'$ ويساوي $-Q'/a$ وجهد ناشئ عن الشحنة Q ومقداره Q/b ، أي أن $V=-\frac{Q'}{a}+\frac{Q}{b}$ ولكن الكرة الداخلية متصلة بالأرض أي أن الجهد عند أي نقطة داخلها ينعدم أي أن $V=0$

$$\therefore -\frac{Q'}{a}+\frac{Q}{b}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore Q'=\frac{a}{b}Q$$

نفرض أن V' الجهد عند أي نقطة على سطح الكرة الخارجية إذن $V'=\frac{Q-Q'}{b}=Q\cdot\frac{b-a}{b^2}$ ،

ب- بما أن $f(x,y,z)=\lambda$ سطح متساوي الجهد إذن بوضع قيم مختلفة للمتغير λ نحصل على سطوح مختلفة متساوية الجهد ، قيمة الجهد V على هذه السطوح هي f أو دالة تعتمد على f ، أي أن

$$V=V(f)=V(\lambda)$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x}=\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\cdot\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) \qquad , \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2$$

$$\therefore \nabla^2 V=\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)\left[\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2}\right]+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\therefore \nabla^2 V=\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)(\nabla^2\lambda)+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)\left|\nabla\lambda\right|^2$$

ولكن $\nabla^2 V=0$ ينتج أن

$$\frac{\nabla^2\lambda}{\left|\nabla\lambda\right|^2}=-\frac{\partial^2 V/\partial\lambda^2}{\partial V/\partial\lambda}=a \ function\,of\ \lambda$$

وللحصول على قيمة هذا الجهد نفرض أن هذه الدالة التي تعتمد على λ هي $g(\lambda)$ أي أن

$$\frac{\nabla^2\lambda}{\left|\nabla\lambda\right|^2}=-\frac{V''(\lambda)}{V'(\lambda)}=g(\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \frac{V''(\lambda)}{V'(\lambda)}=-g(\lambda)$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$\log V'=-\int g(\lambda)\,d\lambda+\log A_{\circ} \quad \Rightarrow \quad V=\int A_{\circ}\, e^{\int\frac{\nabla^2\lambda}{|\nabla\lambda|}d\lambda}\,d\lambda+B$$