جـــامعه بنـــــها
كلـيه الـــــعلوم
قسـم الرياضيات

الزمن : ساعتان
الترم : الأول
التاريخ: ٥-١-٢٠١٥

إجابــــــــــــــة
مادة الاحتمالات للفرقة الثالثة كلية التربية (أساسى رياضيات)

السؤال الأول:

أ – إذا كان 2% من إنتاج مصنع معيباً. أوجد احتمال ألا يزيد عدد الوحدات المعيبة في رسالة حجمها 200 وحدة عن أربع وحدات.

الحــــــــــــــــــــــل:

الحل : معدل عدد القطع المعيبة λ

$$\lambda = 200 \text{ x } 0.02 = 4$$

وعليه فإن:

$$P(X\leq ٤) \ = e^{-4}\frac{4^4}{4!} + e^{-4}\frac{4^3}{3!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} + e^{-4} = 0.606$$

ب - إذا كان $A \subset S$ فأثبت أن $P(A^c) = 1 - P(A)$

الحــــــــــل:

$$\because \ A \cup A^c = S \ , \ A \cap A^c = \Phi$$

أي أن الحادثين متنافيين $A , \ A^c$

$$P(A \cup A^c) = \ \therefore \ P(A) + P(A^c) = P(S) = 1$$

$$\therefore \ P(A^c) = 1 - P(A).$$

السؤال الثاني:

أ– إذا كانت الحوادث $B_1, B_2, \dots, B_n$ تمثل تجزيئاً لفضاء العينة S وكان A أحد حوادث فضاء العينة S أثبت أن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A | B_i) . P(B_i)$$

الحــــــــــل:

$$\because \ A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \ ,$$

تذكر عزيزي الطالب أن:

من جدول الإحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري:

P(Z = 0.5) = 0.6915, P(Z=1)=0.8413, P(Z=1.5)=0.9332, P(Z=2)=0.9772.

$$\because\ (A\cap B_i)\cap(A\cap B_j)=A\cap(B_i\cap B_j)=A\cap\Phi=\Phi\ \ \forall\ i\neq j$$

أي أن الحوادث $(A\cap B_i)$، $(A\cap B_i)$ كلها حوادث متنافية لكل $i\neq j$.

$$\therefore\ P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i)$$

وباستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات فإن :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(A\,|\,B_i).P(B_i).$$

ب- أوجد قيمة الثابت c الذي يجعل الدالة الآتية تمثل دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي x ومن ثم أوجد $P(-1\le X\le 1)$ حيث

$$f(x)=\begin{cases} c\,e^{-4x} & ,x>0 \\ 0 & ,o.w. \end{cases}$$

الحـــــــــــــــل:

دالة كثافة احتمالية لابد من تحقق الشرط $f(x)$**الحل** : لكي تكون

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{-c}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-4x}\,dx=\frac{c}{4}=1$$

$\therefore\ c=٤$

نلاحظ أن الدالة:

$$f(x)=\begin{cases} 4\,e^{-4x} & ,x>0 \\ 0 & ,o.w. \end{cases}$$

وهو تحقق الشرط الأول $\mathbf{f(x)\ge 0}$.

$$\therefore\ P(-1\le X\le 1)=4\int_{0}^{1} e^{-4x}\,dx=e^{-1.5}-e^{-3}\cong 0.173$$

تذكر عزيزي الطالب أن:
من جدول الإحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري:
$P(Z=0.5)=0.6915,\ P(Z=1)=0.8413,\ P(Z=1.5)=0.9332,\ P(Z=2)=0.9772.$

<u>السؤال الثالث:</u>

أ- إذا كان $Y = x^2$ و كان:

$$p(x) = \begin{cases} 1/5 & , \ x = -2, -1, 0, 1, 2 \\ 0 & , \ o.w. \end{cases}$$

فأوجد $E(Y)$.

<u>الحــــــــــل :</u>

$$E(Y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \, . \, p(x)$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 0.\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + .\frac{4}{5} = 2$$

ب – لأى متغير عشوائي X يتبع توزيع بواسون أوجد التوقع والانحراف المعياري.

<u>الحــــــــل:</u>

(١) **القيمة المتوقعة:** باستخدام دالة الكتلة لتوزيع بواسون نجد أن:

$$\mathbf{E(X) = \sum_{x} x\,p(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\,\lambda^x}{x\,!}}$$

$$= \lambda \ \mathbf{e}^{-\lambda} \sum_{\mathbf{y=0}}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathbf{y}}}{\mathbf{y\,!}} = \lambda\, \mathbf{e}^{-\lambda}\, \mathbf{e}^{\lambda} = \lambda \qquad (2)$$

(٢) **التباين:** لحساب التباين نحتاج الى حساب $\mathbf{E(\ X^2)}$ والتي لانستطيع ايجادها من دالة الكتلة مباشرة، ولذلك نوجد بدلا منها

$$\mathbf{E(X(X-1))} = \mathbf{e}^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \mathbf{x(x-1)} \frac{\lambda^{\mathbf{x}}}{x\mathbf{!}} = \lambda^{\mathbf{2}}\, \mathbf{e}^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{\mathbf{x-2}}}{(x-2)\mathbf{!}} = \lambda^2 \quad (3)$$

$$\therefore \ E\left(X^2\right) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda\,. \qquad (4)$$

$$\therefore \ Var(X) = E\left(X^2\right) - \mu^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \qquad (5)$$

<u>تذكر عزيزي الطالب أن:</u>

من جدول الإحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري:

P(Z = 0.5) = 0.6915, P(Z=1)=0.8413, P(Z=1.5)=0.9332, P(Z=2)=0.9772.

أي أن تباين هذا التوزيع يساوي القيمة المتوقعة له.

السؤال الرابع:

إذا كانX متغير عشوائي يمثل أعمار طلبة كلية التربية ويتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط ١٩ سنة وانحراف معياري قدره سنتين . إختير احد الطلاب عشوائيا . أوجد:
١- إحتمال أن يكون الطالب المختار عمره ٢١ سنة علي الأقل.
٢- إحتمال أن يتراوح عمره ما بين ١٨ و ٢٢ سنة.

الحــــــــــــــل:

1) $P(X > 21) = P\ (Z > (21-19)/2)\ = P(Z > 1) =$
$1- P(Z< 1) =1- 0.8413 = 0.1587$

2) $P(18 <X < 22) = P\ ((18-19)/2< Z < (22-19)/2)$
$=P(0.5<Z <1.5) = P(Z <1.5) - P(Z <0.5) = 0.9332 – 0.6915 = 0.2417$

مع أطيب التمنيات
د/أحمد عبدالخالق محمد
كلية العلوم – قسم الرياضيات

تذكر عزيزي الطالب أن:
من جدول الإحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري:
$P(Z = 0.5) = 0.6915,\ P(Z=1)=0.8413, P(Z=1.5)=0.9332,\ P(Z=2)=0.9772.$