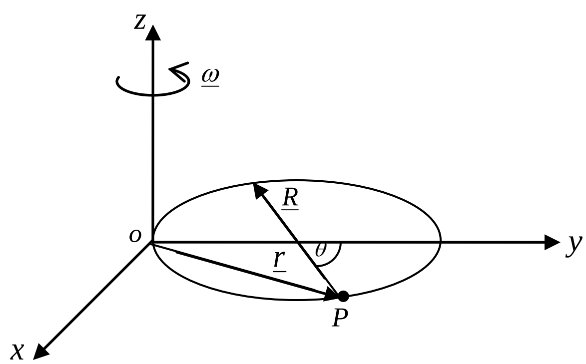
نموذج اجابة ديناميكا متماسك

وكذلك نموذج الأسئلة

ثالثة رياضيات نظام قديم

اجابة السؤال الأول

أ- **الحــل :**



نفرض أن الخرزه P والنقطه الثابته في الفراغ o هي نقطة الأصل ومجموعـة محاور الأسـناد $oxyz$ هي oz محور الدوران . ox في اتجاه المماس للسلك عند نقطة الأصل . oy في اتجاه قطر السلك المار بنقطة الأصـل ، متجهـات الوحـده $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ هـي متجهـات الوحـده فـي الاتجاهـات الموجبـه لمجموعـة المحاور ox, oy, oz على الترتيب . a هو نصف قطر السلك .

نفرض أنه في اللحظه الزمنيه t كان متجه موضع الخرزه بالنسبه لنقطة الأصل هو $\underline{r}$ فإن مركبات المتجه $\underline{r}$ في اتجاه مجموعة محاور الأسناد السابقه هي

$$\underline{r} = (a\sin\theta, a + a\cos\theta)$$

معادلة حركة الخرزه :

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \qquad (1)$$

حيث m كتلة الخرزه ، $\ddot{\underline{r}}$ متجه عجلة الخرزه ، $\underline{F}$ هي القوى المؤثره على الخرزه.

القوى المؤثره على الخرزه :

وزن الخرزه رأسياً لأسفل ومركبة رد فعل السلك على الخرزه رأسياً لأعلى وهاتان القوتان متزنتان (لاتوجد مركبه رأسيه لحركة الخرزه) . مركبة رد الفعل R في اتجاه نصف القطر

(لاتوجد مركبه مماسيه لرد الفعل لأن السلك أملس).وعلى ذلك

$$\underline{F} = \underline{R} = (-R\sin\theta, R\cos\theta) \qquad (2)$$

مجموعة محاور الأسناد هي مجموعة محاور غير قصوريه وتدور بسرعة زاويه ثابته $\underline{\omega}$ حيث

$$\underline{\omega} = \omega\hat{e}_3 = (0,0,\omega)$$

متجه سرعة الخرزه :

$$\underline{r} = a\sin\theta\hat{e}_1 + (a + a\cos\theta)\hat{e}_2$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \left(\frac{\delta\underline{r}}{\delta t}\right) + \underline{\omega} \wedge \underline{r} = a\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_1 - a\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_2$$
$$+ \omega\hat{e}_3 \wedge \left[a\sin\theta\hat{e}_1 + (a + a\cos\theta)\hat{e}_2\right]$$

$$= a\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_1 - a\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_2 + a\omega\sin\theta(\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1) + \omega(a + a\cos\theta)(\hat{e}_3 \wedge \hat{e}_2)$$
$$= a\dot{\theta}\cos\theta\hat{e}_1 - a\dot{\theta}\sin\theta\hat{e}_2 + a\omega\sin\theta\hat{e}_2 - \omega(a + a\cos\theta)\hat{e}_1$$
$$= a(\dot{\theta}\cos\theta - \omega - \omega\cos\theta)\hat{e}_1 + (\omega - \dot{\theta})\sin\theta\hat{e}_2$$

متجه عجلة الخرزه :

$$\underline{a} = \left(\frac{d\underline{v}}{dt}\right) = \left(\frac{\delta \underline{v}}{\delta t}\right) + \underline{\omega} \wedge \underline{v}$$

$$= a\left[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta + 2\omega\dot{\theta}\sin\theta - \omega^2 \sin\theta\right]\hat{e}_1$$

$$+ a\left[-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2 \cos\theta + 2\omega\dot{\theta}\cos\theta - \omega^2 \cos\theta - \omega^2\right]\hat{e}_2$$

من (1),(2),(3) نجد أن

$$R\sin\theta = ma\left[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta + 2\omega\dot{\theta}\sin\theta - \omega^2 \sin\theta\right] \qquad \text{(i)}$$

$$R\cos\theta = ma\left[-\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2 \cos\theta + 2\omega\dot{\theta}\cos\theta - \omega^2 \cos\theta - \omega^2\right] \qquad \text{(ii)}$$

بضرب (i) في $\cos\theta$ ، (ii) في $\sin\theta$ والطرح نحصل على

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

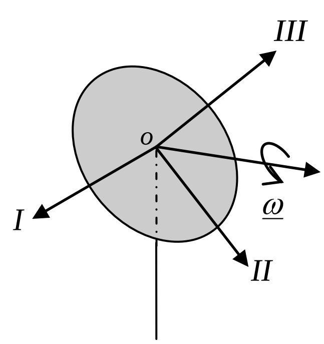
<u>اجابة السؤال الثاني</u>

أ- إذا كانت مجموعة محاور الاسناد مثبتة في الجسم

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = M_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = M_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = M_3$$

ب-**<u>الحــل :</u>**

نضع $\vec{r}$ بدلا من $\vec{\Omega}$



بإختيار مركز القرص (نقطة ثابتة) o نقطة أصل ، المحور III عمودي على مستوى القرص والمحوران I,II يقعان في مستوى القرص وبحيث يقع المتجه $\underline{r}$ في المستوى الذي يحتوي المحوريين II,III عند بداية الحركة .

مجموعة محاور الاسناد السابقة هي مجموعة محاور رئيسية للقصور للقرص عند مركزه o. هذه المجموعة مثبته في القرص .

بفرض m كتلة القرص ، a نصف قطره. عزوم القصور هي

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}ma^2 \quad , \quad I_3 = \frac{1}{2}ma^2$$

بفرض أن متجه السرعة الزاوية للقرص في اللحظة الزمنية t هو $\underline{\omega}$ حيث $\underline{\omega} = (\omega_1 , \omega_2 , \omega_3)$ حيث أن القرص خفيف فإن $\underline{M_o} = \underline{0}$ ، معادلات أويلر للحركة هي

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= 0 \\
I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= 0 \\
I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= 0
\end{aligned}$$

بالتعويض بقيم القصور في المعادلات الثلاثة السابقة نجد أن

$$\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 = 0 \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_3 = 0 \tag{3}$$

بإجراء التكامل للمعادلة (3) واستخدام الشروط الابتدائية وهي عند $t = 0$ كانت $\underline{\omega} = \underline{r}$ حيث $\underline{r} \equiv (0, r\sin\alpha, r\cos\alpha)$ نجد أن

$$\omega_3 = r\cos\alpha \qquad (4)$$

من (1),(2) نحصل على

$$\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_2\omega_2 = 0$$

بإجراء التكامل واستخدام الشروط الابتدائية للمسألة نحصل على

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = r^2\sin^2\alpha$$

ومنها نحصل على

$$\omega_1 = \sqrt{r^2\sin^2\alpha - \omega_2^2} \qquad (5)$$

من (2),(4),(5) نجد أن

$$\dot{\omega}_2 = r\cos\alpha\sqrt{r^2\sin^2\alpha - \omega_2^2}$$

$$\int_{r\sin\alpha}^{\omega_2} \frac{d\omega_2}{\sqrt{r^2\sin^2\alpha - \omega_2^2}} = \int_0^t r\cos\alpha\, dt$$

$$\sin^{-1}\frac{\omega_2}{r\sin\alpha}\bigg|_{r\sin\alpha}^{\omega_2} = (r\cos\alpha)t$$

$$\sin^{-1}\frac{\omega_2}{r\sin\alpha} = \frac{\pi}{2} + (r\cos\alpha)t$$

$$\omega_2 = (r\sin\alpha)\cos(rt\cos\alpha) \qquad (6)$$

من (2) نحصل على $\omega_1 = \dot{\omega}_2/\omega_3$ وبالتعويض من (6),(4) نحصل على

$$\omega_1 = \frac{1}{r\cos\alpha}(r\sin\alpha)\left[-r\cos\alpha\sin(rt\cos\alpha)\right]$$

$$\omega_1 = -r\sin\alpha\sin(rt\cos\alpha) \qquad (7)$$

العلاقات (4),(6),(7) تعطي مركبات المتجه $\underline{\omega}$ في اتجاه المحاور السابقة والمثبته في القرص.

اجابة السؤال الثالث

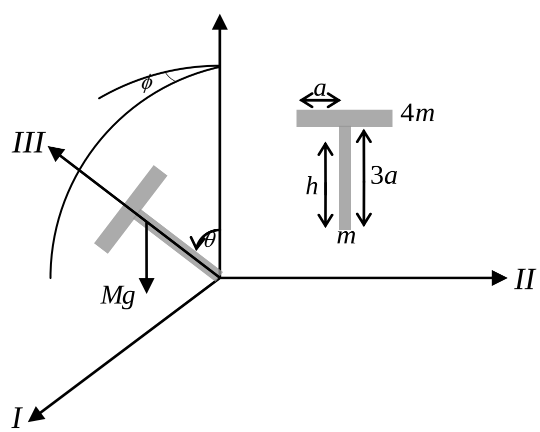
أ- طاقة حركة جسم متماسك يتحرك حركة عامة تساوي مجموع طاقتي الحركة

الأولى : طاقة حركة نقطة مادية كتلتها تساوي كتلة الجسم كله وتتحرك بسرعة مركز كتلة الجسم أي طاقة الحركة الانتقالية .

الثانية : طاقة حركة الجسم في حركته الدورانية حول مركز الكتلة .

$$T = \frac{1}{2}m\underline{v}^2 + \frac{1}{2}\underline{H_C}\cdot\underline{\omega}$$

ب- **الحــل :**



نفرض أن M كتلة النحله ، h بعد مركو كتلة النحله عن سنها .

$$M = 5m \qquad , \qquad h = \left(\frac{27}{10}\right)a$$

$$I = 40ma^2 \quad , \quad I^* = 2ma^2 \qquad (1)$$

زوايا الصعود والهبوط للنحله :

هي الجذور الحقيقيه للمعادلة

$$(H - SI^* \cos\theta)^2 + I(2mgh\cos\theta - K)(1-\cos^2\theta) = 0 \qquad \text{(I)}$$

لتعيين ثوابت الحركة S, H, K نستخدم الشروط الابتدائية للحركة.النحله بدأت الحركة عند $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$ ، بالتعويض في المعادلة (5)، (6) نجد أن

$$H = SI^* \quad , \quad S = 9\sqrt{5g/a} \quad , \quad I^* = 2ma^2 \qquad (2)$$

$$H = 18ma\sqrt{5ga} \qquad (3)$$

$$K = 2Mgh = 27mga \qquad (4)$$

بالتعويض من 1,2,3,4 في I نجد أن

$$(1-\cos^2\theta)(1-2\cos\theta) = 0$$

جذور المعادلة هي

$$\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0$$

وهي زاوية تمايل محور النحله على الرأسي عند بداية الحركة (زاوية الصعود). جذر آخر للمعادلة هو

$$2\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 60^\circ$$

وهي زاوية هبوط النحله على الرأسي .

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق

أ.د.محمود عبد العاطى محمود

كلية تربية بنها الفرقة الثالثة رياضيات عام (نظام قديم) الفصل الأول٢٠١٥/٢٠١٤

قسم الرياضيات ميكانيكا الجسم المتماسك الزمن : ٣ ساعات

وميكانيكا تحليلية السبت :٢٠١٤/١٢/٢٧

<u>أولا: جزء الجسم المتماسك(أجب عن الأسئلة التالية)(ملاحظه :-الدرجة الكلية موزعة بالتساوى)</u>

١- يدور سلك رفيع دائرى أملس بسرعة زاوية ثابتة ω فى مستوى أفقى حول محور عمودى على مستواه عند نقطة o على محيطه . تنزلق خرزة صغيرة ملساء على هذا السلك . أثبت أن معادلة حركة الخرزة هى

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

٢- أ- - أكتب بدون برهان معادلات الحركة لأويلر اذا كانت محاور الأسناد مثبته فى الجسم والجسم يدور بسرعة زاوية $\vec{\omega}\ (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

ب- يتحرك قرص دائرى خفيف موضوع على سن ابرة حركة دورانية بحته حول مركزه .فاذا بدأ حركته بسرعة زاوية $\vec{\Omega}$ حول محور يصنع زاوية α مع العمودى على القرص.أوجد السرعة الزاوية للقرص فى اللحظه الزمنية t.

٣- أ- - اكتب بدون برهان طاقة حركة جسم متماسك يتحرك حركة عامة.

ب- تتكون نحلة من قرص دائرى كتلته $4m$ ونصف قطره a ومن قضيب رفيع مثبت عموديا على مستوى القرص عند مركز القرص كتلته m وطوله $3a$ ،اذا بدأت النحلة الحركة بحيث كان القضيب رأسيا والقرص لأعلى وكانت سرعة لف النحلة حول

محورها هو $9\sqrt{\frac{5g}{a}}$.أثبت أن محور النحلة سوف يهبط حتى يصنع زاوية 60^o مع الرأسى (زاوية الهبوط)