تطبيقات رياضيه

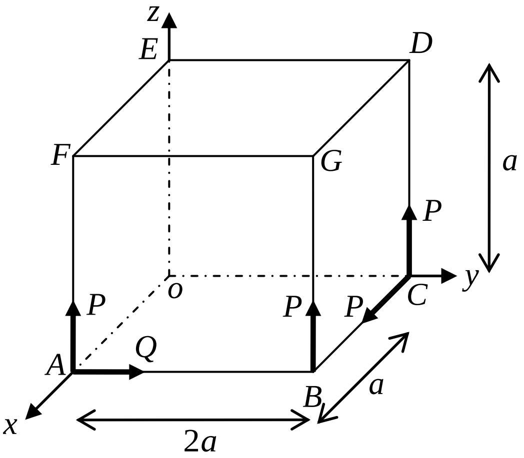
أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوى):-

السؤال الأول

أ- سقطت قطرة مطر تحت تأثير وزنها في وسـط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلتها عند اللحظة الزمنية t تساوى m وسرعتها v ومعدل ازدياد كتلتها λmv حيث λ ثابت ، أثبت أنه عندما تهبط القطرة مسافة x فإن

$$\lambda v^2 = g\left(1 - e^{-2\lambda x}\right)$$

ب- تؤثر أربع قوى متساوية مقدار كل منها P على أحرف متوازي المستطيلات المبين بالشكل ، أوجد العلاقة بين القوة الخامسة المبينة بالشكل ، P بحيث تكافئ المجموعة قوة واحدة وأوجد معادلتي خط عمل هذه القوة المفردة ،



السؤال الثاني

أ- سلسلة منتظمة طولها $37\ cm$ ، ووزن وحدة الأطوال فيها $20\ gm$ ، ثبت أحد طرفيها في نقطة ثابتة a ثم مرت السلسلة على بكرة صغيرة ملساء b في المستوى المار بالنقطة a ، وتدلى جزء من السلسلة رأسياً تحت b طوله $13\ cm$ ، أوجد الشد عند النقطة a وزاوية ميل السلسلة عند نفس النقطة ، برهن على أن الشد عند أسفل نقطة من السلسلة يساوي وزن $100\ gm$ ،

ب- أثبت أن الضغط عند أي نقطة في المائع الذي في حالة سكون له نفس القيمة في جميع الاتجاهات ،

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة تطبيقات رياضيه للفرقة الثانيه تربية عام ـ كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسى ٢٠١٥/٢٠١٤
الفصل الدراسى الأول تاريخ الاختبار السبت ٢٠١٥/١/١٠ (نصف ورقه امتحانيه)
أستاذ المادة د/ مجدي مصطفي حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ-

$$\frac{dm}{dt}=\lambda mv$$

$$\because F=\frac{d}{dt}(m\,v)-u\frac{dm}{dt}$$

$\because$ السحابة ساكنة $\Leftarrow$ $\therefore u=0$ ، إذن معادلة الحركة تصبح على الصورة

$$\therefore F=\frac{d}{dt}(m\,v)\quad\Rightarrow\quad\therefore mg=m\frac{dv}{dt}+v\frac{dm}{dt}\quad\Rightarrow\quad\therefore mg=m\frac{dv}{dt}+\lambda mv^2$$

$$\therefore\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=g-\lambda v^2\quad\Rightarrow\quad\therefore\int\frac{vdv}{g-\lambda v^2}=\int dx+c$$

$$\therefore-\frac{1}{2\lambda}\log\left(g-\lambda v^2\right)=x+c$$

عندما $x=0,v=0$ نجد أن $c=-\dfrac{1}{2\lambda}\log(g)$

$$\therefore x=\frac{1}{2\lambda}\log\frac{g}{g-\lambda v^2}\quad\Rightarrow\quad\therefore e^{2\lambda x}=\frac{g}{g-\lambda v^2}\quad\Rightarrow\quad\therefore g=\left(g-\lambda v^2\right)e^{2\lambda x}$$

$$\therefore\lambda v^2=g\left(1-e^{-2\lambda x}\right)$$

ب-

$$\underline{R}=P\underline{i}+Q\underline{j}+3P\underline{k}$$

$$\underline{M}_o=\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\a&0&0\\0&0&P\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\a&0&0\\0&Q&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\a&2a&0\\0&0&P\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\0&2a&0\\0&0&P\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\0&2a&0\\P&0&0\end{vmatrix}=4aP\underline{i}-2aP\underline{j}+a(Q-2P)\underline{k}$$

لكي تؤول المجموعة إلى قوة مفردة فإن

$$\underline{R}\cdot\underline{M}_o=0\quad\Rightarrow\quad\therefore 4aP^2-2aPQ+3aP(Q-2P)=0\quad\Rightarrow\quad\therefore aPQ=2aP^2\quad\Rightarrow\quad\therefore Q=2P$$

وتتعين معادلة خط عمل هذه القوة المفردة من أي زوج من المعادلات الثلاثة الآتية :

$$M_{ox}=yR_z-zR_y\quad,\quad M_{oy}=zR_x-xR_z\quad,\quad M_{oz}=xR_y-yR_x$$

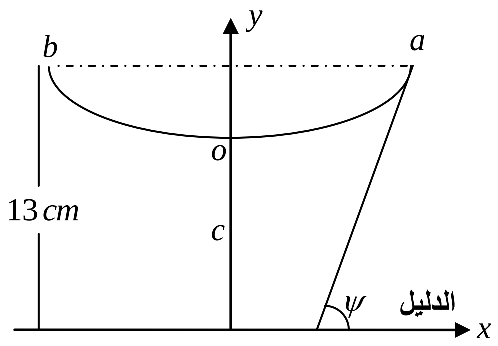
$$4aP=3Py-2Pz\quad,\quad -2aP=Pz-3Px\quad,\quad 0=2Px-Py$$

ولذلك فخط عمل المحصلة يمثله أي زوج من المعادلات الثلاثة الآتية :

$$3y-2z=4a\quad,\quad 3x-z=2a\quad,\quad 2x-y=0$$

إجابة السؤال الثاني :

أ- واضح أن $\overset{\frown}{ab} = 37 - 13 = 24\ cm$



$$\therefore \overset{\frown}{bo} = \overset{\frown}{ao} = 12\ cm$$

$$T_a = T_b = 13\,w = 13 \times 20 = 260\,gm.wt$$

كذلك

$$s = c\tan\psi \quad \Rightarrow \quad \therefore 12 = c\tan\psi \qquad (1)$$

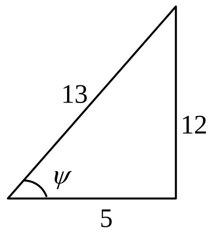
$$y = c\sec\psi \quad \Rightarrow \quad \therefore 13 = c\sec\psi \qquad (2)$$

من المعادلتين $(1),(2)$ نحصل على

$$\sin\psi = 12/13 \quad \Rightarrow \quad \therefore \psi = \sin^{-1}\frac{12}{13}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

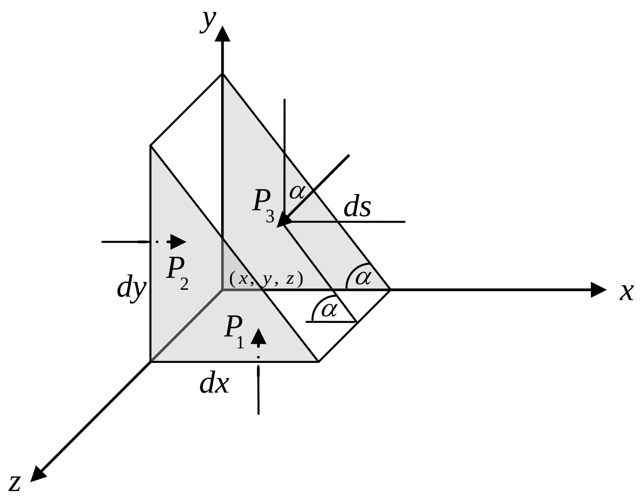
$$12 = c \cdot \frac{12}{5} \Rightarrow \therefore c = 5$$



$$\therefore T_a = 13 \cdot 20 = 260\ gm.wt$$

$$T_{\circ} = 5 \cdot 20 = 100\ gm.wt$$

ب- دعنا ننظر إلي وعاء يحتوي سائل في حالة سكون ، ولنتخيل حجم صغير من السائل على شكل منشور ثلاثي عند نقطة ما في السائل كما في الشكل



$\because$ السائل في حالة سكون أي أنه لا توجد حركة نسبية بين طبقات السائل ٠

$\therefore$ ينعدم إجهاد القص عند جميع النقط في السائل أي أن المركبة المماسية للقوى السطحية تساوي صفراً ٠

وتؤول القوة السطحية إلى المركبة العمودية فقط وهي الضغط أما القوي الحجمية فهي تنشأ من قوى الجاذبية الأرضية التي تؤثر في الاتجاه السالب لمحور y كما في الشكل السابق ٠ نفرض أن $\delta\tau$ الحجم الصغير من المائع عند النقطة (x, y, z) حيث

$$\delta\tau = dx\,dy\,dz$$

وتكون القوى الحجمية الناتجة من الجاذبية الأرضية تساوي

$$\rho\, g\, \delta\tau / 2$$

حيث ρ الكثافة الحجمية للسائل ، g عجلة الجاذبية الأرضية ٠ بتحليل القوى في اتجاه محور x ينتج أن

$$P_2\, dy\, dz - P_3 \sin\alpha\, dz\, ds = 0 \qquad (2)$$

حيث α الزاوية التي يصنعها ds مع محور x كما هو مبين بالشكل السابق٠ ولكن $dy = ds \times \sin\alpha$ بالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن

$$P_2 = P_3 \qquad (3)$$

بالتحليل في اتجاه محور y نحصل على

$$P_1\, dx\, dz - P_3\, dz\, ds\, \cos\alpha - \frac{1}{2}\rho\, g\, dx\, dy\, dz = 0 \qquad (4)$$

ولكن $dx = ds \times \cos\alpha$ بالتعويض في (4) نحصل على

$$P_1 - P_3 - \frac{1}{2}\rho\, g\, dy = 0 \qquad (5)$$

وحيث أن الحد الثـــالث في المعادلة الســـابقة صغير جداً نتيجة وجود dy لذلك يمكن إهماله أي أن المعادلة (5) تصبح على الصورة

$$P_1 = P_3 \qquad (6)$$

بمقارنة المعادلتين (6),(3) ينتج أن

$$P_1 = P_2 = P_3 \qquad (7)$$

حيث $\delta\tau$ عنصر حجم صغير اختياري وكذلك الزاوية α اختيارية ٠