



الأجابه النموذجيه :

(1) إذا كان $h(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} e^{3y}$ فإن

$$h_x = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} e^{3y}$$

$$h_y = \frac{-x}{y^2} + 3 \frac{y}{x} e^{3y} + \frac{1}{x} e^{3y}$$

$$h_{xy} = \frac{-1}{y^2} - 3 \frac{y}{x^2} e^{3y} - \frac{1}{x^2} e^{3y}$$

(2) اولاً : نجعل النقطه (x, y) تقترب من $(0, 0)$ خلال المسار $y = mx$, $m \neq 0$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(mx)}{x^4 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

ثانياً : نجعل النقطه (x, y) تقترب من $(0, 0)$ خلال المسار $y = x^2$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2)}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

معنى هذا أنه ليس كل مسار الى النقطه $(0, 0)$ يؤدي الى نفس النتجه

و بالتالى فإن نهايه هذه الداله غير موجوده

(3)

نفرض أن أبعاد الصندوق هي x, y, z بالتالى يكون حجم الصندوق هو $V = xyz = 256$

و مساحه سطحه هي $S = xy + 2xz + 2yz$

المطلوب هو إيجاد النهايه الصغرى للداله S بحيث يتحقق أن $V = xyz = 256$

حيث أن $z = 256/xy$ بالتالي فإن $S = xy + 512/y + 512/x$

$$S_y = x - 512/y^2 = 0, \quad S_x = y - 512/x^2 = 0 \quad \text{و يكون}$$

$$x = y = 8 \quad \text{بحل هاتين المعادلتين نجد أن}$$

$$S_{xy} = 1, \quad S_{yy} = 1024/y^3 = 0, \quad S_{xx} = 1024/x^3$$

$$\text{عند النقطة } (8, 8) \text{ تكون } S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2 = 4 - 1 > 0$$

إذن اصغر مساحة نحصل عليها تكون أبعاد الصندوق هي

$$x = y = 8, \quad z = 256/xy = 4$$

$$S_{\min} = 64 + 64 + 64 = 192 \text{ cm}^2$$

(4)

نرسم منطقة التكامل في الأحداثيات القطبية حيث $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$

نجد أن المساحة المطلوبه هي تلك المحصوره بين الدائرتين $r = 4, \quad r = 5$ و يكون

$$\int_R \int \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 4 \int_0^{\pi/2} \int_4^5 r \cdot r dr d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_4^5 r \cdot r dr = \frac{122}{3} \pi$$

(5) لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4}$$

و حيث أن $(-1)^{n+1}$ تتذبذب بين $-1, 1$

$$\text{إذن المتتابعه } (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n+1}$$

تتذبذب بين $-3/4$ و $3/4$ لذا فهي تباعديه.

لمعرفة إذا كانت المتتابعه $\frac{e^3}{4l}, \frac{e^4}{6l}, \frac{e^5}{8l}, \frac{e^6}{10l}, \dots$ تزايديه أم تناقصيه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+3}/(2n+4)l}{e^{n+2}/(2n+2)l} = \frac{e}{(2n+4)(2n+3)} < 1 \quad \text{فإنه لجميع قيم } n \text{ نجد}$$

و هو ما يوضح أن المتتابعه تناقصيه

