جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: الثانية ـ تربية عام رياضيات

يوم الامتحان: الأثنين ٢٩ / ١٢ / ٢٠١٤ م

المادة : جبر خطى (٢)

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

الامتحان+ نموذج إجابته

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النهائى
يناير 2015
الزمن: ساعتان

جبر خطى ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

اجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :-

إذا كانت A هي مصفوفة المعاملات لمنظومة المعادلات الخطية التالية:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2$$
$$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5$$
$$5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12$$

فأوجد مصفوفة B رتبتها $r = 2$ تحقق $AB = O$.

السؤال الثاني :-

ادرس هل يمكن التعبير عن المتجه $(3, -1, 4)$ في R_3 كتركيب خطى من المتجهات

$$(1, -1, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (3, -5, -2)$$

السؤال الثالث :-

ليكن $\hat{T}$ هو المؤثر الخطي على R^2 المعرف كما يلي:

$$\hat{T}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

وليكن $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ الأساس المعتاد لـ R^2 و $e_2^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ أساس آخر لـ R^2

أوجد ما يأتي:

(i) مصفوفة $\hat{T}$ في الأساس $\{e\}$ أي $[\hat{T}]_e$ وكذلك في الأساس $\{e^*\}$ أي $\{\hat{T}\}_{e^*}$

(ii) مصفوفة الانتقال للإحداثيات P من الأساس $\{e\}$ للأساس $\{e^*\}$. أوجد كذلك مصفوفة الانتقال للإحداثيات Q من الأساس $\{e^*\}$ للأساس $\{e\}$. واثبت أن $Q = P^{-1}$.

(iii) استخدم النتائج السابقة للتحقق من أن $[\hat{T}]_{e^*} = P[\hat{T}]_e Q$.

السؤال الرابع:-

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصاحبة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

مـع أطـيب التمنيـات بالنجـاح،،،

د/ محمد نصر

جامعة بنها
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول ــ الامتحان النهائى
يناير 2015
الزمن: ساعتان

جبر خطى ــ لطلاب الفرقة الثانية
تربية عام (شعبة الرياضيات) ــ كلية التربية

السؤال الأول :-

$$\begin{array}{lll} x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0 & x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0 & x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-3x_3+4x_4=0 \sim & x_3-2x_4=0 \sim & x_3-2x_4=0 \\ 5x_1+10x_2-8x_3+11x_4=0 & 2x_3-4x_4=0 & 0=0 \end{array}$$

$$x_3=2x_4, \qquad x_1=-2x_2+x_4$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x_2+x_4 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=x_2X_1+x_4X_2$$

$$B=\begin{pmatrix} -2t & r \\ t & 0 \\ 0 & 2r \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad : \quad AB=O.$$

السؤال الثاني :-

لكى يكون المتجه $(3,-1,4)$ فى $\text{span}\{(1,-1,0),(0,1,1),(3,-5,-2)\}$

فإنه توجد أعداد c_1 , c_2 , c_3 تحقق

$$(3,-1,4)=c_1(1,-1,0)+c_2(0,1,1)+c_3(3,-5,-2) \qquad (1)$$

إذا وجد حل للمعادلة (1) يكون

$$(3,-1,4)\in \text{span}\{(1,-1,0),\ (0,1,1),\ (3,-5,-2)\}$$

حل منظومة المعادلات

$$\begin{array}{llll} c_1+ & 3c_3=3 & c_1+ & 3c_3=3 \\ -c_1+c_2 & -5c_3=-1 \sim & c_2 & -2c_3=2 \\ c_2 & -2c_3=4 & c_2 & -2c_3=4 \end{array} \sim \begin{array}{llll} c_1+ & 3c_3=3 \\ c_2 & -2c_3=2 \\ 0 & =2 \end{array}$$

حيث أن $\ell_{r+1} = 2 \neq 0$

و تكون منظومة المعادلات (1) متناقضة أى ليس لها حل. و من ثم لا يمكن كتابة المتجه $(3, -1, 4)$ كتركيب خطى من المتجهات $(3, -5, -2)$, $(0, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$.

السؤال الثالث :-

(i) حيث أن $\hat{T}(e_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\hat{T}(e_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

إذن $[\hat{T}]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = T$

$$\hat{T}(e_1^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_1^* + e_2^*$$

حيث أن

$$\hat{T}(e_2^*) = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2e_1^* + 2e_2^*$$

إذن $[\hat{T}]e^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = T^*$

(ii) مصفوفات الانتقال للإحداثيات:

حيث أن
$$e_1^* = e_1 + e_2$$
$$e_2^* = -e_1$$

كذلك
$$e_1 = -e_2^*$$
$$e_2 = e_1^* + e_2^*$$

فإن $(e_1 \quad e_2) = (e_1^* \quad e_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

مصفوفة انتقال الإحداثيات P من الأساس $\{e\}$ للأساس $\{e^*\}$ يكون:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

كذلك حيث أن

$$(e_1^* \quad e_2^*) = (e_1 \quad e_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

وتكون مصفوفة الانتقال من الأساس $\{e^*\}$ للأساس $\{e\}$ هي:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن
$$Q\,P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ويكون
$$Q = P^{-1}$$

(iii)
$$T^* = P\,T\,Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

السؤال الرابع:-

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المصاحبة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A هى:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -5$$

$$\underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 3}$$

يكون
$$X_{\lambda=3} = \{X_1, X_2\}$$

حيث

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda=3}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V_{\lambda=3}=2$$

$\lambda_3=-5$

يكون

$$X_{\lambda=-5}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda=-5}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V_{\lambda=-5}=1$$

انتهت الأسئلة والأجوبة،
متمنياً للجميع التوفيق والنجاح،
د. محمد نصر