جامعة بنها – كلية التربية - الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٤/٢٠١٥
امتحان الفرقة الثانية تربية عام – شعبة رياضيات

المادة / استاتيكا (٢) **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوي) :

السؤال الأول

أ- أثبت أن $\nabla r^n = nr^{n-2}\underline{r}$ ، ثم أوجد المشتقة الاتجاهية للدالة $\phi = x^2y + y^2z + xz^2$ في اتجاه المتجه $\underline{A} = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$ ٠

ب- أوجد متجهات الوحدة في حالة الإحداثيات الكروية وأثبت أنه نظام متعامد ٠

السؤال الثاني

أ- إذا كانت

$$\psi(r,\theta,\phi) = r^2 \cos\theta \sin n\phi$$

فأوجد $\nabla\psi$ ٠

ب- إذا كانت دالة الجهد ϕ لنظام معين هي

$$\phi = \begin{cases} -\lambda r\cos\theta & r < a \\ \lambda\cos\theta\left(r - \dfrac{2a^3}{r^2}\right) & r \geq a \end{cases}$$

أوجد الكثافة الحجمية ρ عندما $r < a$ والكثافة السطحية على الكرة $r = a$ ٠

السؤال الثالث

أ- احسب التكامل الخطي للحقل الاتجاهي $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\,\underline{j} + 3x\underline{k}$ على مسار المستقيم Γ الواصل من النقطة $(0,0,3)$ إلى النقطة $(2,-8,3)$ ٠

ب- أذكر نظرية جاوس للإنتشار وبإستخدامها احسب $\oiint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\,\underline{j} + yz\underline{k}$ والسطح S هو المكعب الذي تحدده المستويات $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ ٠

السؤال الرابع

أ- أوجد معادلة خطوط القوى إذا كان شدة المجال الكهروستاتيكي $\underline{E}$ هي

$$\underline{E} = \frac{l\cos\theta}{r^3}\,\underline{e_r} - \frac{l\sin\theta}{r^3}\,\underline{e_\theta}$$

ب- حقق نظرية أستوك للمتجه $\underline{A}$ حيث

$$\underline{A} = (2x-y)\underline{i} - yz^2\,\underline{j} - y^2z\underline{k}$$

على السطح S الذي يكون السطح العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ، c هي حدودها ٠

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة استاتيكا (٢) للفرقة الثانية تربية عام - كلية التربية شعبة رياضيات العام الدراسي ٢٠١٥/٢٠١٤ الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الأثنين الموافق ٢٠١٥/١/٥ ورقة إمتحانية كاملة
أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ-

$$\nabla r^n = \nabla\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\}^n = \nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$
$$= \underline{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2} + \underline{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$
$$= \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x\underline{i}+2y\underline{j}+2z\underline{k}) = n(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})(x^2+y^2+z^2)^{(n-2)/2} = nr^{n-2}\underline{r}$$

المشتقة الاتجاهية هي

$$\frac{d\phi}{dl} = \nabla\phi\cdot\hat{\underline{t}}$$

حيث $\hat{\underline{t}}$ متجه الوحدة في اتجاه $\underline{A}$

$$\therefore \hat{\underline{t}} = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{9+1+9}} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$
$$\frac{d\phi}{dl} = \left[(2xy+z^2)\underline{i}+(2yz+x^2)\underline{j}+(2xz+y^2)\underline{k}\right]\times\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$
$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{1}{\sqrt{19}}\left[6xy+3z^2+2yz+x^2-6xz+3y^2\right]$$

ب- في هذه الإحداثيات يكون

$$u_1 = r \quad ، \quad u_2 = \theta \quad ، \quad u_3 = \phi$$
$$x = r\sin\theta\cos\phi \ , \ y = r\sin\theta\sin\phi \ , \ z = r\cos\theta$$
$$\therefore \underline{r} = r\sin\theta\cos\phi\underline{i} + r\sin\theta\sin\phi\underline{j} + r\cos\theta\underline{k}$$
$$h_1 = \left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}\right| = \left|\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\underline{j}+\cos\theta\underline{k}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta} = 1$$

وبالمثل نجد أن

$$h_2 = r \quad , \quad h_3 = r\sin\theta$$

ومتجهات الوحدة هي

$$\underline{e}_r = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\underline{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\underline{j}+\cos\theta\underline{k}$$
$$\underline{e}_\theta = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\underline{i}+\cos\theta\sin\phi\underline{j}-\sin\theta\underline{k}$$
$$\underline{e}_\phi = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\underline{j}$$

نلاحظ أن $\underline{e}_r\cdot\underline{e}_\theta = \underline{e}_r\cdot\underline{e}_\phi = \underline{e}_\theta\cdot\underline{e}_\phi = 0$ أي أن النظام متعامد ٠

إجابة السؤال الثانى :

أ- ψ دالة في الإحداثيات الكروية r,θ,ϕ فيكون

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{e_\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\underline{e_\phi}$$
$$=2r\cos\theta\sin n\phi\,\underline{e_r}-r^2\sin\theta\sin n\phi\,\underline{e_\theta}+nr\cot\theta\cos n\phi\,\underline{e_\phi}$$

ب-

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial r}=-\lambda\cos\theta\quad,\quad\frac{\partial\phi_2}{\partial r}=\lambda\cos\theta\left(1+\frac{4a^3}{r^3}\right)$$
$$\because\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial r}-\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right)_{r=a}=-4\pi\gamma\sigma$$
$$\therefore-\lambda\cos\theta-5\lambda\cos\theta=-4\pi\gamma\sigma\quad\Rightarrow\quad\therefore\sigma=\frac{3\lambda\cos\theta}{2\pi\gamma}$$

لإيجاد كثافة الكتلة الحجمية عندما $r<a$ من معادلة بواسون $\nabla^2\phi_1=4\pi\gamma\rho$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{r\sin\theta}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}\right)\right]=4\pi\gamma\rho$$
$$\therefore\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-\lambda r^2\sin\theta\cos\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\lambda r\sin^2\theta)\right]=4\pi\gamma\rho$$
$$\therefore\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[-2\lambda r\sin\theta\cos\theta+2\lambda r\sin\theta\cos\theta\right]=4\pi\gamma\rho\quad\Rightarrow\quad\therefore\rho=0$$

إجابة السؤال الثالث :

أ- المسار بين النقطتين $(0,0,3)$ ، $(2,-8,3)$ عبارة عن خط مستقيم معادلته

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{-8}=\frac{z-3}{0}=\lambda$$
$$\therefore x=2\lambda\,,\ y=-8\lambda\,,\ z=3\quad,\quad0<\lambda<1$$

متجه الموضع

$$\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}=2\lambda\underline{i}-8\lambda\underline{j}+3\underline{k}$$
$$d\underline{r}=2(\underline{i}-4\underline{j})d\lambda$$
$$\therefore\int_\Gamma\underline{F}\cdot\hat{t}\,dl=2\int_0^2(5y\underline{i}-xz\underline{j}+3x\underline{k})\cdot(\underline{i}-4\underline{j})d\lambda=2\int_0^1[5(-8\lambda)+4(2\lambda)(3)]d\lambda$$
$$=2\int_0^1[-40\lambda+24\lambda]d\lambda=2\int_0^1[-16\lambda]d\lambda=-32\left[\frac{\lambda^2}{2}\right]_0^1=-16$$

ب- نظرية جاوس للانتشار هي

$$\oint_S\underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_v(\nabla\cdot\underline{F})\,dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x,y,z أي أن

$$\nabla\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=4z-y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F}\cdot \underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2-yz)_0^1 dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2-y)\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}$$

إجابة السؤال الرابع :

أ- نلاحظ هنا أن شدة المجال $\underline{E}$ دالة تعتمد على r,θ وبالتالي تكون معادلة خطوط القوى على الصورة

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\, d\phi}{E_\phi} \qquad (1)$$

ولكن

$$E_r = \frac{l\cos\theta}{r^3} \quad , \quad E_\theta = -\frac{l\sin\theta}{r^3}$$

$\therefore$ من المتساوية الأولى من المعادلة (1) نحصل على

$$\frac{r^3 dr}{l\cos\theta} = -\frac{r^4 d\theta}{l\sin\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \frac{dr}{r} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$$

وبالتكامل نجد أن

$$\ln r = -\ln\sin\theta + \ln c \qquad \Rightarrow \qquad \therefore r\sin\theta = c$$

وهي معادلة خطوط القوى حيث c ثابت التكامل ·

ب- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x = \cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A}\cdot \underline{dr} = \oint_c \left\{(2x-y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz\right\} = \int_0^{2\pi}(2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta)d\theta = \pi \qquad (1)$$

أيضاً

$$\nabla \wedge \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S (\nabla \wedge \underline{A})\cdot \underline{ds} = \int_S \underline{k}\cdot \underline{n}\, ds = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

حيث $\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds = dxdy$ على الدائرة $x^2+y^2=1$

$$\therefore \int_S (\nabla \wedge \underline{A})\cdot \underline{ds} = 4\int_0^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi \qquad (2)$$

من (2),(1) تكون نظرية أستوك قد تحققت ·