جامعة بنـها – كلية التربية – تخلفات العام الدراسي٢٠١٣/٢٠١٤
امتحان تخلفات الفرقة الثانيه تربية عام– شعبة رياضيات

المــــــادة / استاتيكا (٢) **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول

أ- أوجد المشتقة الاتجاهية للدالة $\phi = x^2 y + y^2 z + xz^2$ في اتجاه المتجه $\underline{A} = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$.

ب- أثبت أن المجال الاتجاهي

$$\underline{F} = x^m y^m z^m (x^n \underline{i} + y^n \underline{j} + z^n \underline{k})$$

غير محافظ إلا إذا كانت $n = -1$ أو $m = 0$.

السؤال الثاني

أ- بإستخدام قوانين المؤثر التفاضلي ∇ أوجد $\nabla \psi$ حيث

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2) e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ب- احسب التكامل السطحي $\oint_S f(x,y,z)\,da$ حيث $f = xz + 3y - z$ والسطح S مكون من نصف اسطوانة محورها محور z ونصف قطر قاعدتها 3 ومستطيل في المستوى xz ونصفي دائرتين في المستويين $z = 4, z = 0$.

السؤال الثالث

أ- أثبت أن $\nabla^2 (1/r) = 0$.

ب- أوجد متجهات الوحدة في الإحداثيات الأسطوانية وأثبت أنه نظام متعامد .

السؤال الرابع

أ- بإستخدام نظرية جاوس للانتشار احسب $\oiint_S \underline{F} \cdot \underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2 \underline{j} + yz\underline{k}$ والسطح S هو المكعب الذي تحدده المستويات $x = 0 , x = 1 , y = 0 , y = 1 , z = 0 , z = 1$.

ب- حقق نظرية أستوك للمتجه $\underline{A}$ حيث

$$\underline{A} = (2x - y)\underline{i} - yz^2 \underline{j} - y^2 z \underline{k}$$

على السطح S الذي يكون السطح العلوي للكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، c هي حدودها .

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة استاتيكا (٢) تخلفات الفرقة الثانيه تربية عام - كلية التربية شعبة رياضات العام الدراسي ٢٠١٣/٢٠١٤ تاريخ الاختبار الخميس ٢٠١٤/٩/١٨ (ورقه امتحانيه كامله)

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ- المشتقة الاتجاهية هي

$$\frac{d\phi}{dl} = \nabla\phi \cdot \hat{\underline{t}}$$

حيث $\hat{\underline{t}}$ متجه الوحدة في اتجاه $\underline{A}$

$$\therefore \hat{\underline{t}} = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{9+1+9}} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl} = \left[(2xy + z^2)\underline{i} + (2yz + x^2)\underline{j} + (2xz + y^2)\underline{k}\right] \times \frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{1}{\sqrt{19}}\left[6xy + 3z^2 + 2yz + x^2 - 6xz + 3y^2\right]$$

ب-

$$\nabla \wedge \underline{F} = m\left[(x^m y^{m-1} z^{m+n} - x^m y^{m+n} z^{m-1})\underline{i} + (x^{m+n} y^m z^{m-1} - x^{m-1} y^m z^{m+n})\underline{j} + (x^{m-1} y^{m+n} z^m - x^{m+n} y^{m-1} z^m)\underline{k}\right]$$

و هذا المقدار لا يساوي الصفر (أي أن المجال غير محافظ) إلا إذا كان

$$m + n = m - 1 \Rightarrow n = -1 \quad or \quad m = 0$$

$\therefore$ المجال الاتجاهي $\underline{F}$ غير محافظ إلا إذا كانت $n = -1$ أو $m = 0$

إجابة السؤال الثاني

أ-

$$\psi = (x^2 + y^2 + z^2)\, e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = r^2\, e^{-r}$$

ولكن $\nabla f(r) = f'(r)\underline{r}/r$

$$\therefore \nabla(r^2 e^{-r}) = \left(2r\,e^{-r} - r^2 e^{-r}\right)\frac{\underline{r}}{r} = (2 - r)\,e^{-r}\,\underline{r}$$

ب- نستخدم هنا الإحداثيات الاسطوانية لجميع أجزاء السطح فيما عدا المستطيل حيث يناسبه الإحداثيات الكارتيزية ، وبذلك يكون لدينا الآتي

١- نصف الاسطوانة

$$\rho = 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad 0 < z < 4 \quad , \quad da_1 = \rho\, d\phi\, dz$$

٢- نصف الدائرة السفلي

$$0 < \rho < 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad z = 0 \quad , \quad da_2 = \rho\, d\phi\, d\rho$$

٣- نصف الدائرة العلوي

$$0 < \rho < 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad z = 4 \quad , \quad da_3 = \rho\, d\phi\, d\rho$$

٤- المستطيل

$$-3 < x < 3 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad 0 < z < 4 \quad , \quad da_4 = dx\, dz$$

وكما نعلم أنه في الإحداثيات الاسطوانية

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

و على ذلك فإن أجزاء التكامل السطحي هي على الترتيب

$$\iint_{S_1} f\, da_1 = \int_0^4\int_0^\pi (3z\cos\phi + 9\sin\phi - z)3d\phi\, dz = 3\left[\frac{3}{2}z^2\sin\phi - 9z\cos\phi - \frac{1}{2}z^2\phi\right]_{0,0}^{4,\pi}$$

$$= 3[9(4)(2) - 8\pi] = 24(9-\pi)$$

$$\iint_{S_2} f\, da_2 = \int_0^3\int_0^\pi 3\rho\sin\phi\cdot\rho\, d\rho\, d\phi = \left[\rho^3\right]_0^3\left[-\cos\phi\right]_0^\pi = 54$$

$$\iint_{S_3} f\, da_3 = \int_0^3\int_0^\pi (4\rho\cos\phi + 3\rho\sin\phi - 4)\rho\, d\rho\, d\phi = \left[\frac{4}{2}\rho^3\sin\phi - \rho^3\cos\phi - 2\rho^2\phi\right]_{0,0}^{3,\pi}$$

$$= 27(2) - 18\pi = 54 - 18\pi$$

$$\iint_{S_4} f\, da_4 = \int_0^4\int_{-3}^3 (zx - z)dxdz = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-3}^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = -48$$

ويكون التكامل على السطح كله هو

$$\oint_S f(x,y,z)da = 24(9-\pi) + 54 - 18\pi - 48 = 276 - 42\pi$$

إجابة السؤال الثالث

أ-

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

ولكن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

والآن نحسب

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right]$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

وبالمثل فإن

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \quad ، \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}$$

$$\therefore \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} - \frac{3}{r^3} = \frac{3r}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0$$

ب- في هذه الحالة يكون

$$u_1 = \rho \quad ، \quad u_2 = \phi \quad ، \quad u_3 = z$$

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

ولكن معادلات التحويل هي

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

$$\therefore \underline{r} = \rho\cos\phi\,\underline{i} + \rho\sin\phi\,\underline{j} + z\underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right| = \left|\cos\phi \underline{i} + \sin\phi \underline{j}\right| = 1$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi}\right| = \left|-\rho\sin\phi \underline{i} + \rho\cos\phi \underline{j}\right| = \rho \quad ، \quad h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial z}\right| = \left|\underline{k}\right| = 1$$

أي أن عوامل التدرج هي

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \rho \quad , \quad h_3 = 1$$

ونلاحظ أن

$$0 \le \rho \le \infty \quad , \quad 0 \le \phi \le 2\pi \quad , \quad -\infty \le z \le \infty$$

والآن نوجد متجهات الوحدة في حالة الإحداثيات الاسطوانية

$$\underline{e}_\rho = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \cos\phi \underline{i} + \sin\phi \underline{j} \quad , \quad \underline{e}_\phi = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho}(-\rho\sin\phi \underline{i} + \rho\cos\phi \underline{j}) = \sin\phi \underline{i} + \cos\phi \underline{j}$$

$$\underline{e}_z = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{k}$$

ومن الواضح أن

$$\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\phi = \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_z = \underline{e}_\phi \cdot \underline{e}_z = 0$$

وهذا يعني أن الإحداثيات الاسطوانية متعامدة ٠

إجابة السؤال الرابع

أ- من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_v (\nabla \cdot \underline{F})\, dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x, y, z أي أن

$$\nabla \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4z - y$$

$$\therefore \oint_S \underline{F} \cdot \underline{ds} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z - y)\,dz\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2 - yz)_0^1\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{3}{2}dx = \frac{3}{2}$$

ب- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x = \cos\theta \quad , \quad y = \sin\theta \quad , \quad z = 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A} \cdot \underline{dr} = \oint_c \left\{(2x - y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz\right\} = \int_0^{2\pi}(2\cos\theta - \sin\theta)(-\sin\theta)d\theta = \pi \quad (1)$$

أيضاً

$$\nabla \wedge \underline{A} = \underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = \int_S \underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

حيث $\underline{k} \cdot \underline{n}\, ds = dxdy$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 1$

$$\therefore \int_S (\nabla \wedge \underline{A}) \cdot \underline{ds} = 4\int_0^1 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi \quad (2)$$

من (2),(1) تكون نظرية أستوك قد تحققت ٠
